計測情報処理論 講義資料

第4章　計測の直交性

篠田 裕之

http://www.hapis.k.u-tokyo.ac.jp/

hiroyuki_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp

今回の結論

被測定量: **x**, ノイズ : **w**,
計測システムの出力: **y** = A**x** + **w**

＊ノイズ **w** の各成分はランダムで分散が等しい.

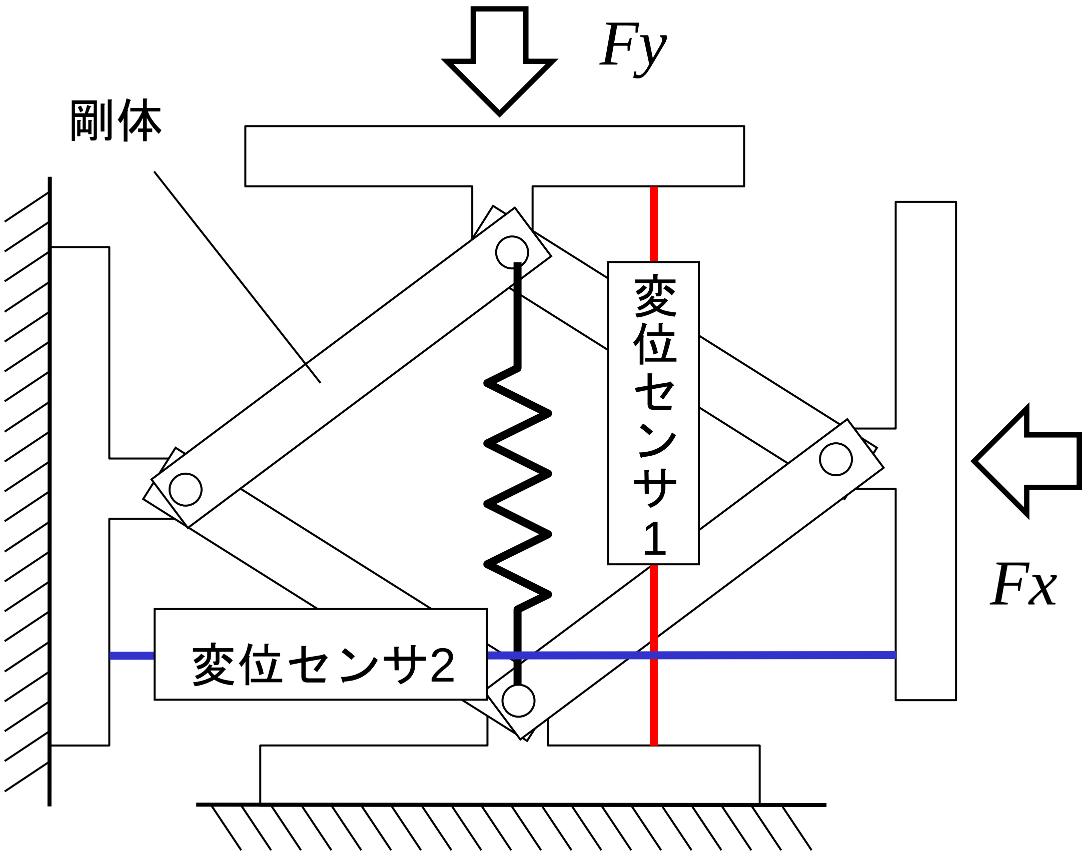
このような計測系において
行列 A の最大特異値と最小特異値の比が1に近い

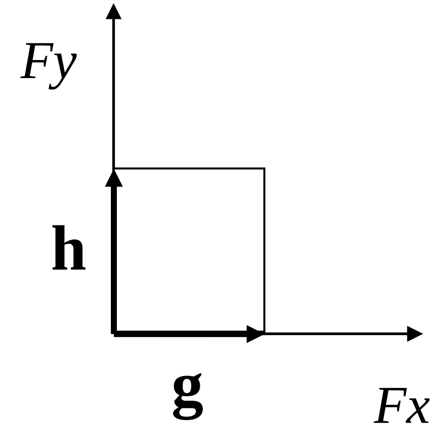
⇕

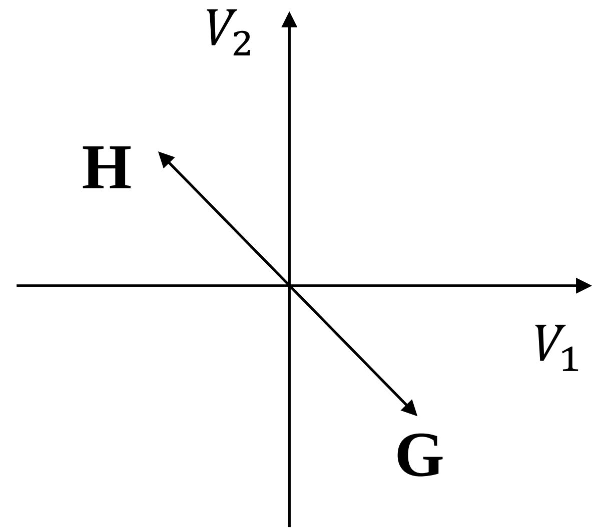
x の各自由度を均等な精度で測定可能

観測したい **x** の基底に対するセンサ群の出力ベクトル **y** が直交するシステムはよい観測系である。

ナンセンスな２次元センサ







変位センサ１，２の出力 (V_1, V_2) から $\left(F_x, F_y\right)$ を推定することはできない

$\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{H}$ の場合 (F_x, F_y) は特定できない

・ただし識別可能な状態数がゼロになるわけではない
・計測可能な成分と計測できない成分が存在する

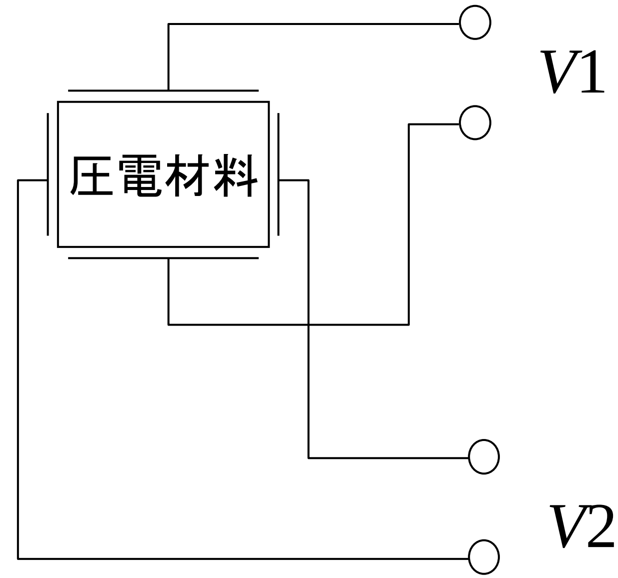
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Fx + Fy \\ Fx - Fy \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} Fx \\ Fy \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とすると、

αは測定不能
βは測定可能

信号の直交性

例1） 応力センサ



測定したい量
--- 応力 (S_{xx}, S_{yy})

計測システムの出力
--- 電圧 ($V1$, $V2$)

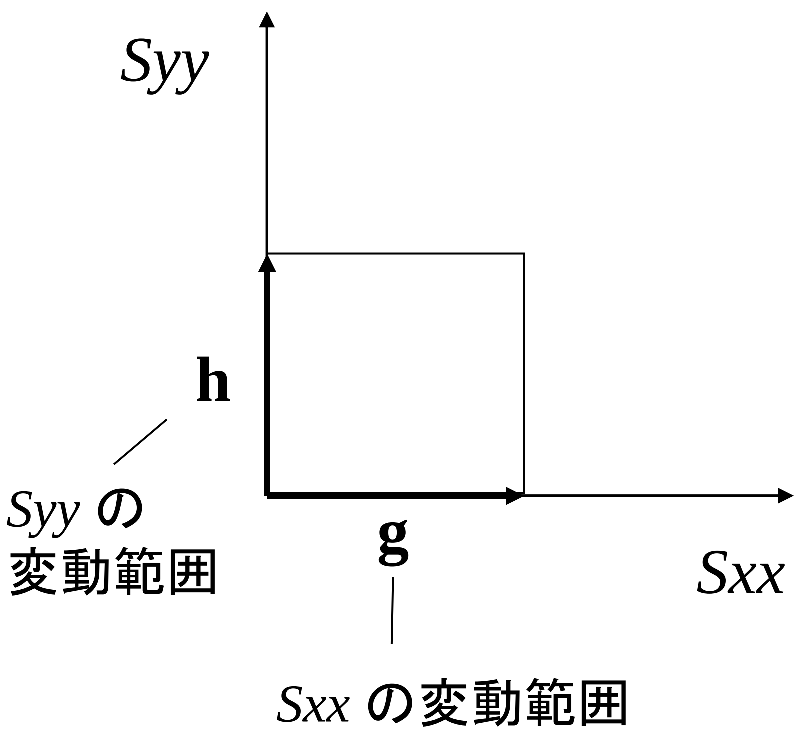
真値　ノイズ

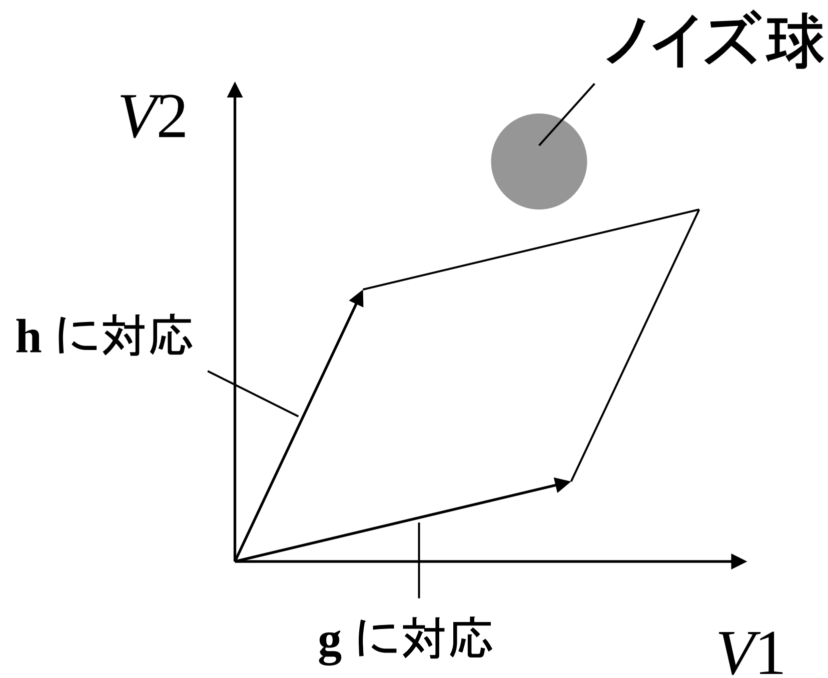
$$\begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e1 \\ e2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e3 \\ e4 \end{pmatrix}$$

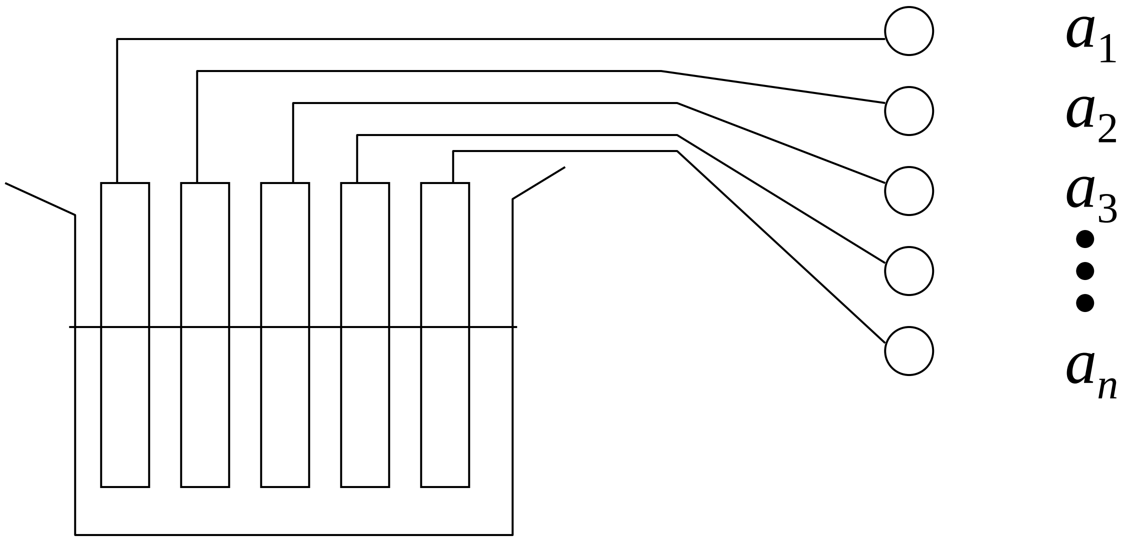
最終的に知りたい量
(s_{xx}, s_{yy})

直接的に観測される量
(V_1, V_2)





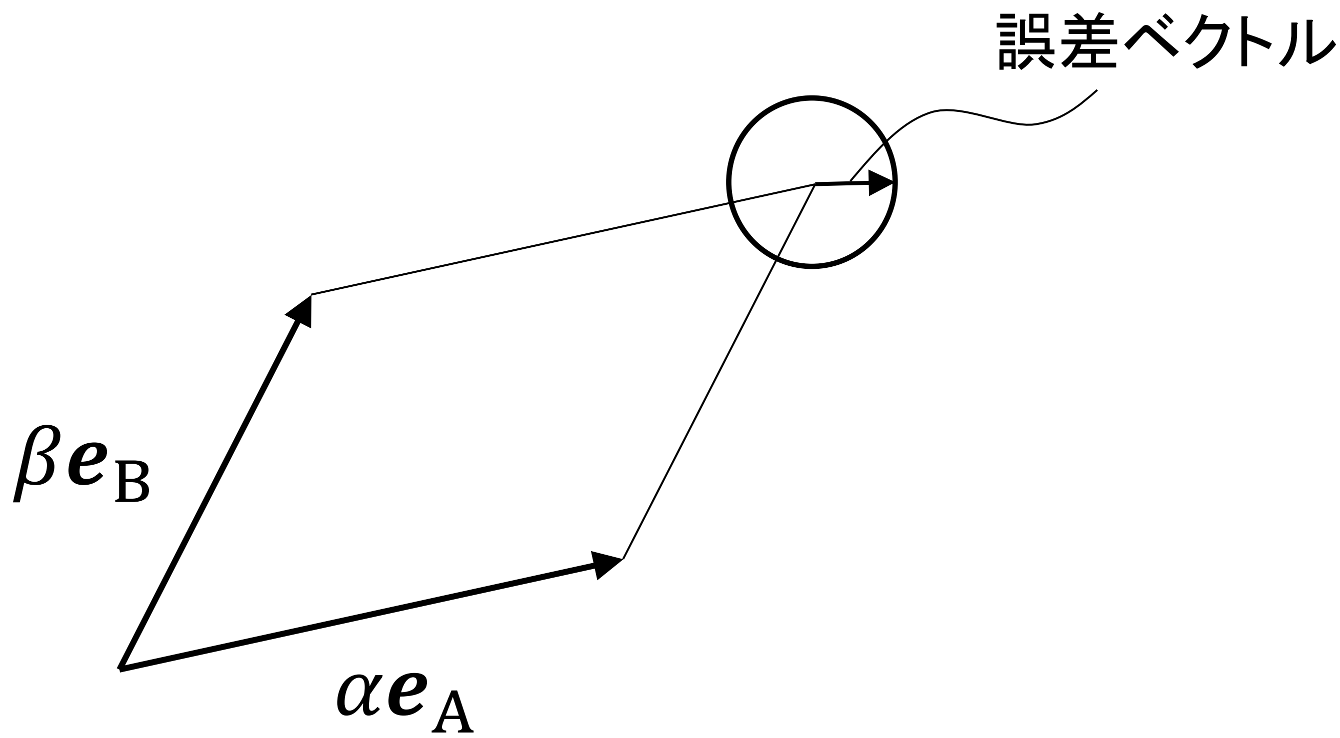
例2） 化学成分センサ



成分 A の濃度 α に対するセンサ出力 $\longrightarrow$ $\alpha\mathbf{e}_{\mathrm{A}}, \quad \mathbf{e}_{\mathrm{A}} = \left(a_1, a_2, \cdots a_n\right)$

成分 B の濃度 β に対するセンサ出力 $\longrightarrow$ $\beta\mathbf{e}_{\mathrm{B}}, \quad \mathbf{e}_{\mathrm{B}} = \left(b_1, b_2, \cdots b_n\right)$

溶液 A, B の濃度 (α, β) を同時測定したい



信号の直交性　例2-a

問題

ある生物が体液中の3種類の化学成分濃度 (x_1, x_2, x_3) [%] を自律的に変化・保持させることにより一種の記憶動作を行っているものとする．体内にはそれらの濃度に対して

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

のように (y_1, y_2, y_3) を出力する3種類のセンサがあり，感覚系の上位機構は (y_1, y_2, y_3) の各成分値を ± 0.1 以内の精度で検出できるものとすると，この記憶系が一回の動作で記録可能な情報は最大何ビットか？

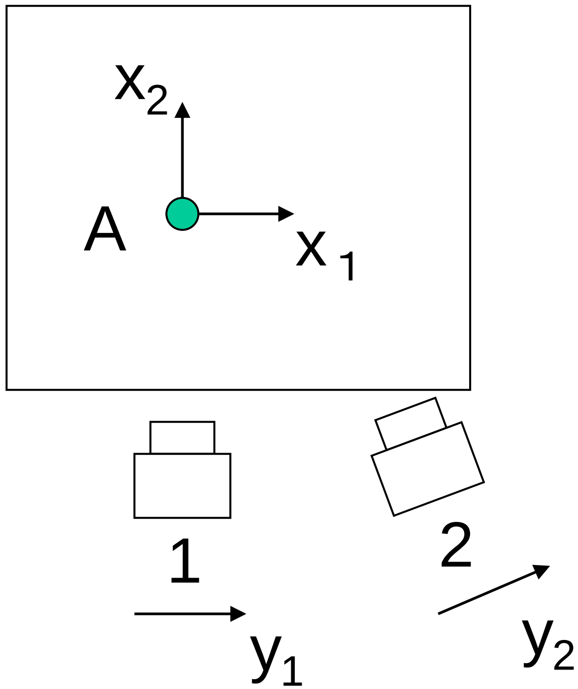
なおx_i は $0 < x_i < 10$ なる範囲の値を自由にとることができるものとし，各成分の読み取り誤差間に相関は無いものとする．

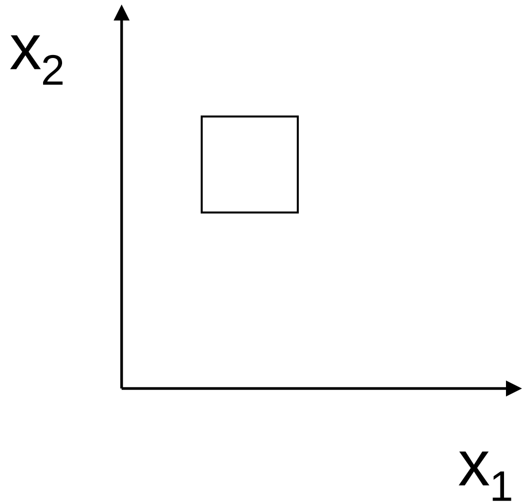
例3）　画像計測

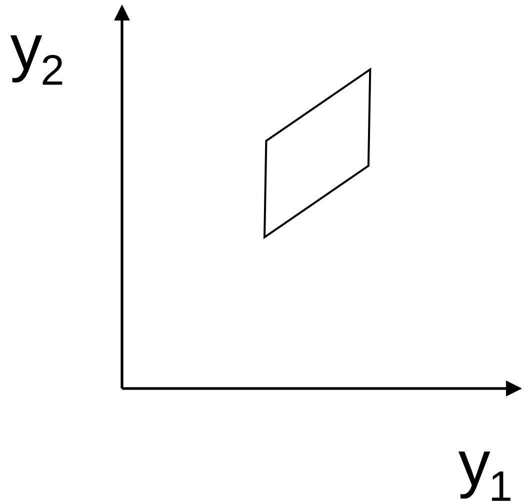
観測物体の変位の観測精度とカメラ位置の関係は？

(x_1, x_2) : 対象（点）の位置

y_i : カメラ i の画像中の位置

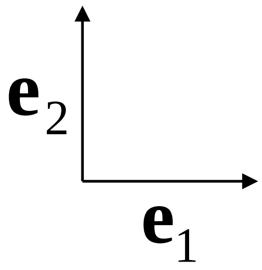


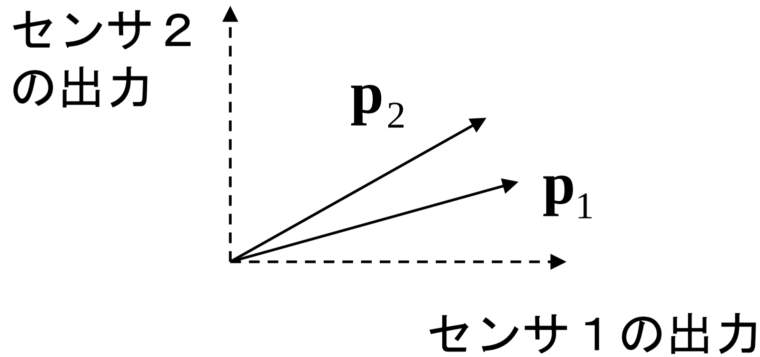




音源Aから出る $300\ \mathrm{Hz}$ の正弦波信号 $p_{\mathrm{A}}(t)$ と、音源Bから出る $120\ \mathrm{Hz}$ の正弦波信号 $p_{\mathrm{B}}(t)$ が同時に1つのマイクに入り、$p = p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}}$ が観測されている。p_{A}、p_{B} の振幅を、p から同時推定する際の推定誤差を求めよ。
ただし観測時間は $T = 1\ \mathrm{s}$ であり、A、Bそれぞれが単独で存在するときの信号振幅推定誤差は w_{A} および w_{B} であるとする。

観測しやすい量としにくい量

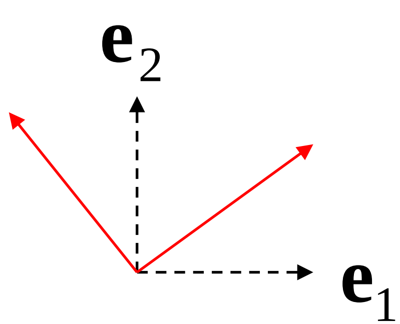


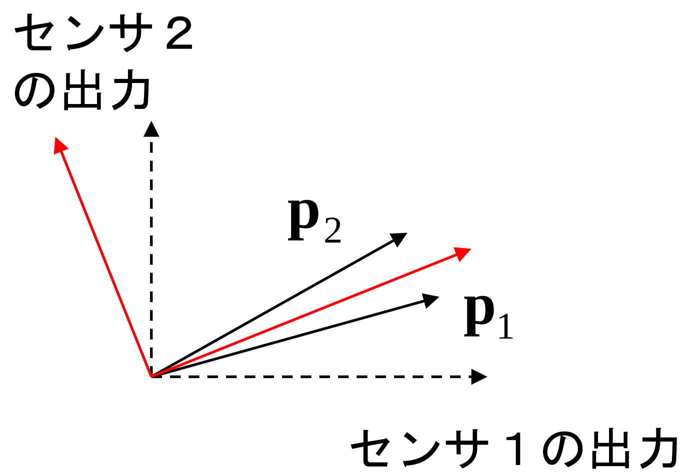


観測したい物理量 x の空間

センサ出力パターン y の空間

計測システムの能力は一般にどのように記述されるか





計測の可能性を特異値分解を通して理解する

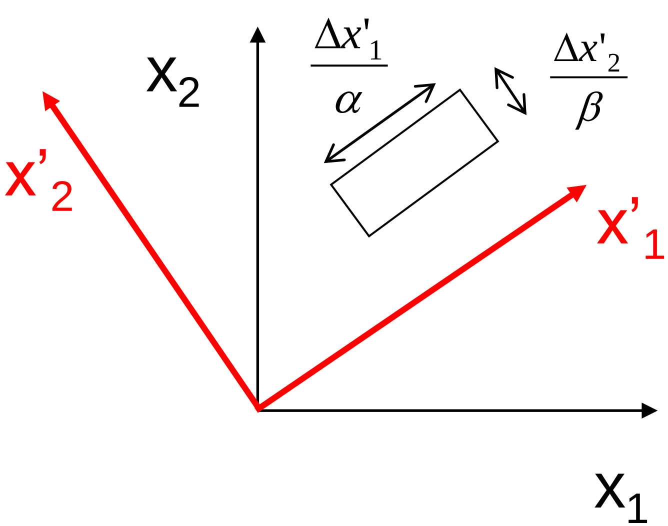
$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

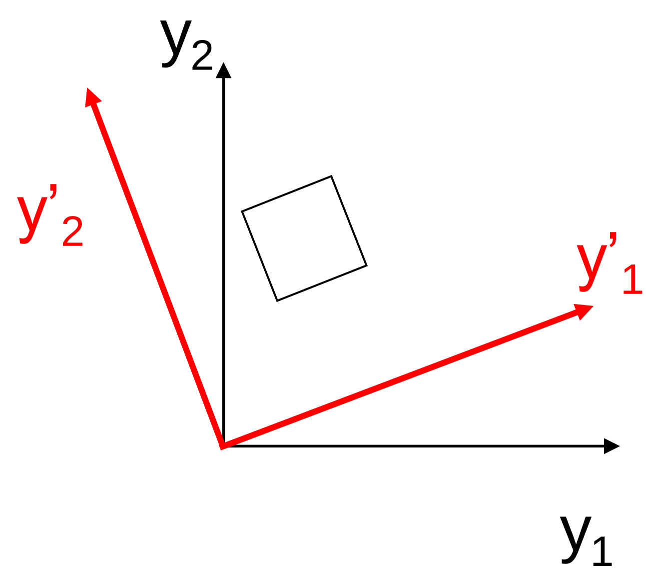
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

α,β: ${}^tAA$ の固有値の平方根





● 特異値分解

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & m \times n & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$R_2 A R_1^{-1} = \begin{pmatrix} \\ \mathrm{m \times m} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{m \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{n \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad R_2 \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ 0 & & & \end{pmatrix} R_1 \mathbf{x}$$

特異値分解の導出

（1） $A^{\mathrm{T}}A$ は対称行列なので対角化可能

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} & n \times m & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ m \times n & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

は対称な $n \times n$ 行列

＊ただし $m > n$ とする

すなわち

$$R^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)R = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} = (AR)^{\mathrm{T}}(AR) \qquad \left(a_i > 0\right)$$

を成立させる直交行列 R を見つけることができる。

（２）

$$(AR)^{\mathrm{T}}(AR)=\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

であるから、

$$(AR)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\qquad\qquad \mathbf{p}_1 \qquad\qquad}}^{m} \\ \boxed{\qquad\qquad \mathbf{p}_2 \qquad\qquad} \\ \vdots \\ \boxed{\qquad\qquad \mathbf{p}_n \qquad\qquad} \end{pmatrix}$$

$(AR)^{\mathrm{T}}$ の全ての行ベクトルは互いに直交し、各行ベクトルの長さは $\|\mathbf{p}_i\| = \sqrt{a_i}$

（3）

したがって、ある直交行列 R_2 の行ベクトル $\mathbf{q}_1 \sim \mathbf{q}_m$ が、$1 \le i \le n \ (< m)$ において

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_i / \sqrt{a_i}$$

を満たすように選ばれていれば、

$$R_2 = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \phantom{\mathbf{q}_2} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_{n+1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_m \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{a_1}}\mathbf{p}_1 \\ \frac{1}{\sqrt{a_2}}\mathbf{p}_2 \\ \\ \frac{1}{\sqrt{a_n}}\mathbf{p}_n \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

R_2 は

$$R_2 A R = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & & 0 \\ & \sqrt{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{a_n} \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

を満たす。
$R = R_1^{-1}$ とすれば、証明したい式となる。

計測の可能性を座標変換によって理解する

観測したい物理量

センサ群の出力

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

座標変換

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = R_1 \mathbf{x} \\ \mathbf{y}' = R_2 \mathbf{y} \end{cases}$$

R_1, R_2 は下記をみたす

$$A = R_2^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ 0 & & & \end{pmatrix} R_1$$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ 0 & & & \end{pmatrix} \mathbf{x}'$$

適切に座標変換すると、
非対角成分をゼロにできる

知りたい量の推定精度は特異値を見れば分かる

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ 0 & & & \end{pmatrix} \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{w}'$$

センサ群の出力を回転したベクトル

観測したい物理量を回転したベクトル

①ゼロでない λ_i に対応する x_i が観測可能

センサ出力の読み取り誤差が各成分一様なら、

各固有成分の計測誤差は $\dfrac{1}{\lambda_i}$ に比例

② λ_i の値が揃っている $\Longleftrightarrow$ A が直交行列

$\Longleftrightarrow$ 各 x_i に対するセンサ出力ベクトルが相互に直交

この章のまとめ（再掲）

被測定量: $\mathbf{x}$, ノイズ : $\mathbf{w}$,
計測システムの出力: $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{w}$

＊ノイズ $\mathbf{w}$ の各成分はランダムで分散が等しい.

このような計測系において
行列 A の最大特異値と最小特異値の比が1に近い

⇕

$\mathbf{x}$ の各自由度を均等な精度で測定可能

観測したい $\mathbf{x}$ の基底に対するセンサ群の出力ベクトル $\mathbf{y}$ が直交するシステムはよい観測系である。

補足

- ノイズ $\mathbf{w}$ の各成分の分散が等しくない場合

  → 分散が等しくなるようにスケール変換した後で
  この章の方法が適用できる

- ここでの議論では、ノイズ $\mathbf{w}$ の成分間に相関がないことを仮定していたことに注意