計測情報処理論 講義資料

第3章　アナログパターンの情報量

篠田 裕之

https://hapislab.org/public/hiroyuki_shinoda/keisoku_joho

hiroyuki_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp

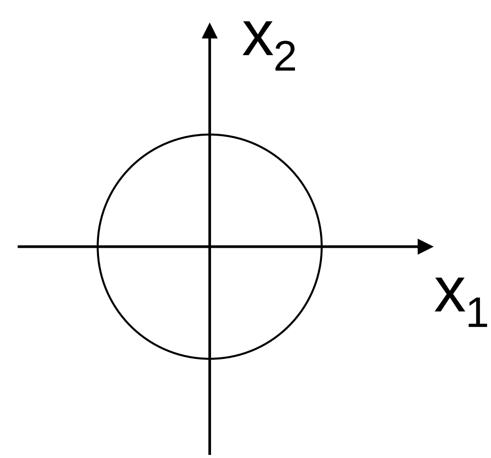
本章の目的：
アナログパターンから読み取れる情報量の理論限界を理解する

ステップ 1: 多次元空間における球は以下のように書ける

２次元 $$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

３次元 $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

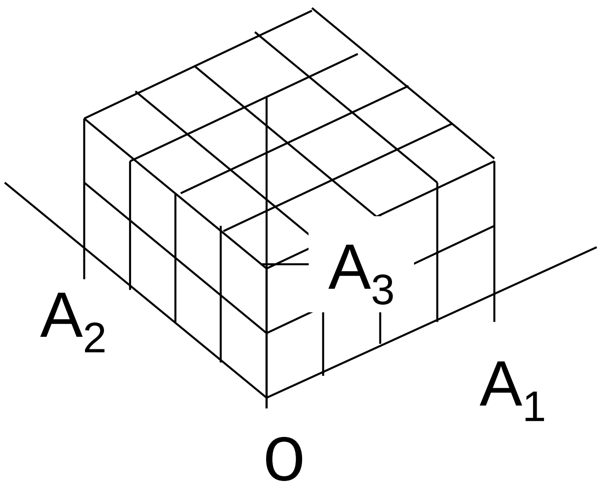
n 次元 $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$$



- 信号は多次元空間中の一点である
- 多次元空間においても「体積」は定義できる

例えば n 次元空間内の領域 V

$$0 < x_i < A_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$



の中に単位立方体

$$0 < x_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

は $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$ 個入り、これが領域 V の体積である。

球の体積

2D πr^2

3D $\dfrac{4\pi}{3} r^3$

nD $A r^n$ $A(2m) = \dfrac{\pi^m}{m!}$

信号の存在範囲

$$|\mathbf{x}|^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_N^2 < S$$

U: ノイズの存在範囲

$$U = \{\boldsymbol{x} \mid \ \|\boldsymbol{x}\|^2 < W\}$$

V: 信号＋ノイズの存在範囲

$$\boxed{V = \{\boldsymbol{x} \mid \ \|\boldsymbol{x}\|^2 < S + W\}}$$

？？？

3. 誤りなく伝送可能な情報量の上限

（信号＋ノイズ）球の体積

$$H = \log \frac{A(N)\sqrt{S+W}^{\,N}}{A(N)\sqrt{W}^{\,N}} = \log \sqrt{\frac{S+W}{W}}^{\,N} = \boxed{\frac{N}{2}\log\left(1+\frac{S}{W}\right)}$$ ビット

ノイズ球の体積

N: 信号点数
S: 信号エネルギ
W: ノイズエネルギ（白色）

○ これ以上の情報を誤りなく送ることができないことは確かだが、
この段階では本当に H ビットの情報を送れるかどうかは分からない

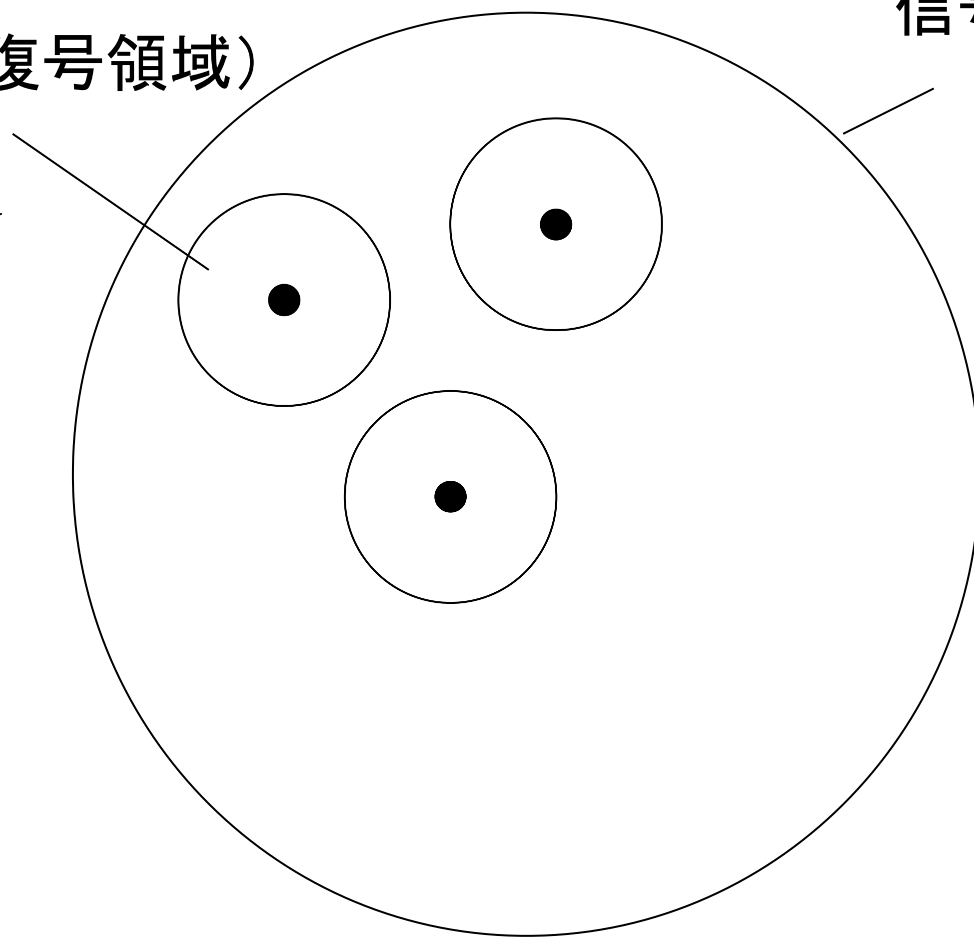
識別可能な状態数の上限 = V/U

信号＋ノイズ の領域

体積 V

ノイズ球（復号領域）

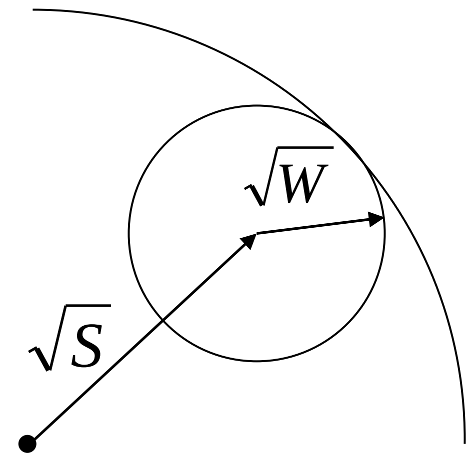
体積 U



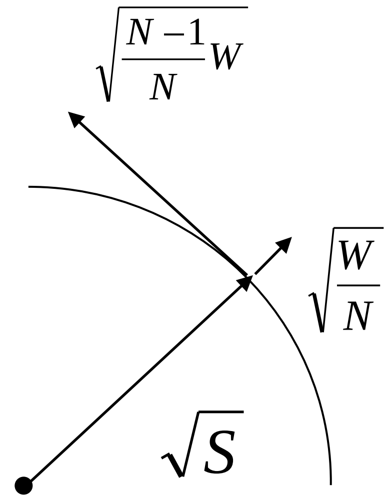
信号+ノイズの存在範囲

２次元、あるいは3次元の場合、
信号＋ノイズの点の存在する
領域は以下のように書ける。

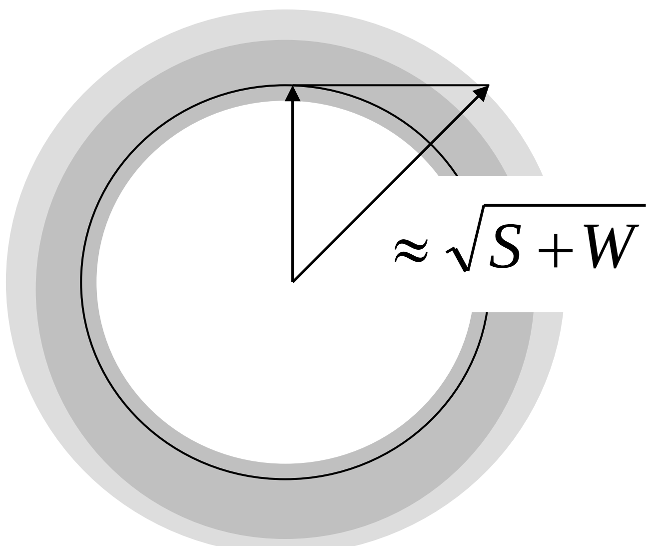
$$|\mathbf{x}|^2 < \left(\sqrt{S} + \sqrt{W}\right)^2$$



多次元空間における
信号＋ノイズの存在範囲



ノイズの大半の成分は信号と直交



補足説明: $\|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w}\|^2 > S+W+\Delta$ となる確率

$$\|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w}\|^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(s_i^2 + 2s_iw_i + w_i^2\right)$$
$$= S + W + 2\sum_{i=1}^{N} s_iw_i$$
$$= S + W + 2\sqrt{S}w_s$$

w_s は $\boldsymbol{w}$ に含まれる $\boldsymbol{s}$ に平行な成分であり、
分散 W/N の標準正規分布に従う。

したがって、ほとんどの $\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w}$ は、

半径 $\sqrt{S+W+2\sqrt{SW/N}}$ の球と、半径 $\sqrt{S+W-2\sqrt{SW/N}}$

の球の間の空間 G にある。

上記外側球と内側球の体積比を r とすると、

$$\log r=\log\frac{\left(S+W+2\sqrt{SW/N}\right)^{N/2}}{\left(S+W-2\sqrt{SW/N}\right)^{N/2}}=\frac{N}{2}\log\frac{S+W+2\sqrt{SW/N}}{S+W-2\sqrt{SW/N}}$$

$N\to\ \infty$　のとき

$$\log r\to\ \infty,\quad \frac{1}{N}\log r\to 0$$

＊すなわち前スライドの $H/N\ \ (N\to\ \infty)$ は、上記空間 G の体積をノイズ球の体積で割ったものに置き換えても変化しない。

4. 前章の結果と H の比較

$S \ll W$ のとき

$$H = \frac{N}{2}\log\left(1+\frac{S}{W}\right) \approx \frac{1}{2\log_{\mathrm{e}}2}\frac{NS}{W} = 0.72\frac{NS}{W}$$

$S \gg W$ のとき

$$H = \frac{N}{2}\log\left(1+\frac{S}{W}\right) \approx \log\sqrt{\frac{S}{W}}^{N}$$

＊上記は 前章の方式④の結果に一致

前の章の既出スライド

④ 直交信号の組み合わせで伝達される情報量

[1] $S < W$ のとき

m 個の信号成分について、その2状態の選択の仕方で情報を伝える場合

$$m = \frac{S}{\eta^2} = \frac{SN}{r^2 W} \quad \text{ビット}$$

[2] $S > W$ のとき

N個の各基底成分に最大エネルギー $\frac{S}{N}$ を分配し、その強度を読み取る場合

$$\log_2 \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{S}{W}} \right)^N = \frac{N}{2} \log_2 \frac{S}{r^2 W} \quad \text{ビット}$$

[補足]　$S > W$ のとき

- N 個の基底（N 点の波形）に重み b_i をつけて和をとり、

$$s(n) = \sum_{i=1}^{N} b_i \phi_i(n)$$

  のように伝送する
- 各基底に割り当てるエネルギの最大値を S/N とする
- 誤りなく同定できる各基底の重み b_i の段階数は

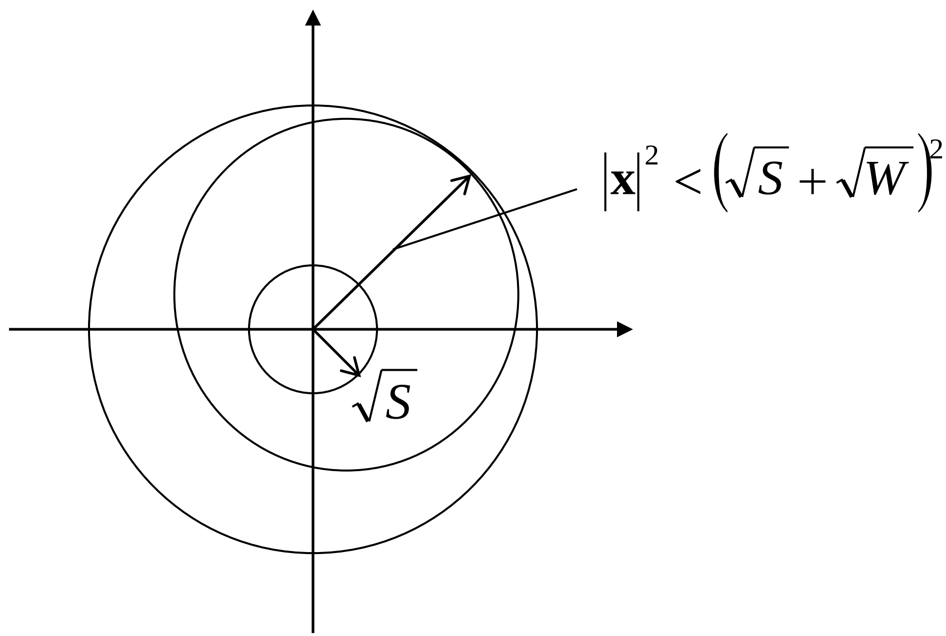
$$\frac{2\sqrt{S/N}}{2\sqrt{W/N}} = \sqrt{\frac{S}{W}} \text{ 段階}$$

- 誤りなく伝達できる信号バリエーションの数

$$\left(\sqrt{\frac{S}{W}}\right)^N \text{ 通り}$$

5. 多次元空間の分割

低次元で考察すると、S＜W の場合、１ビットも伝送できないように感じられる。



高次元での球　1

次元が大きくなると事情が変わる

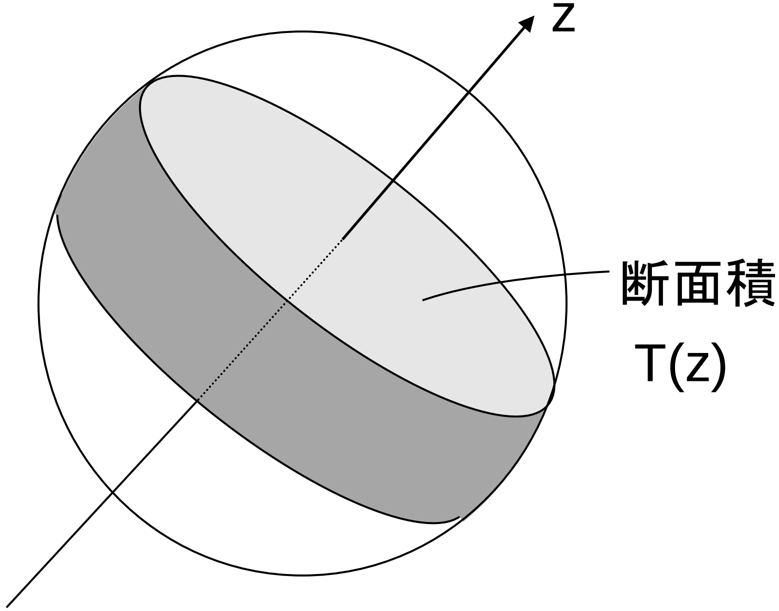
球の体積の大部分が表面近くにある

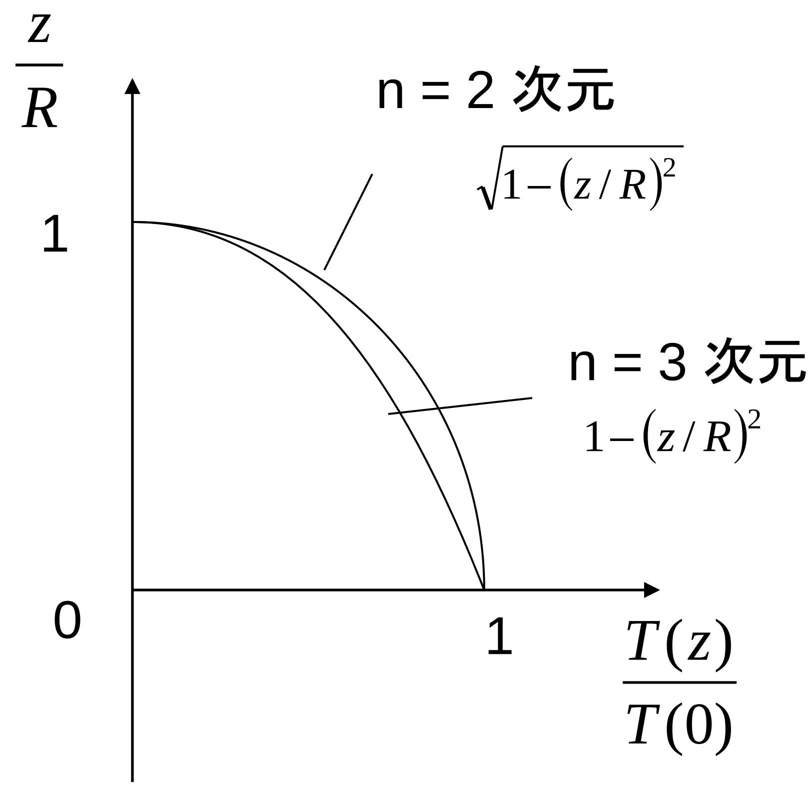
$$\frac{\text{半径}0.99\text{の球の体積}}{\text{半径１の球の体積}} = 0.99^n$$

$$0.99^{300} = 0.05$$

高次元での球　2

体積の大部分が赤道近くにある



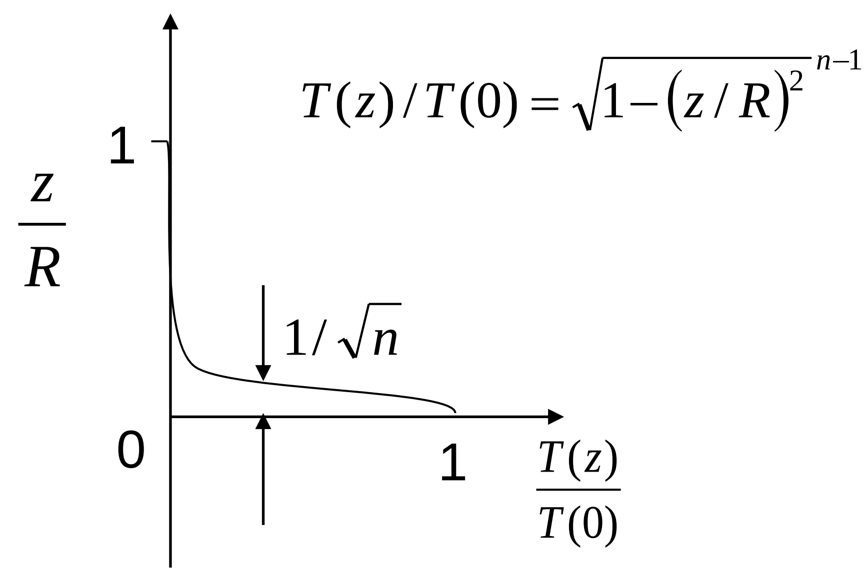


n 次元球の断面積の大きさ

原点から距離 z 離れた n-1 次元平面による断面積

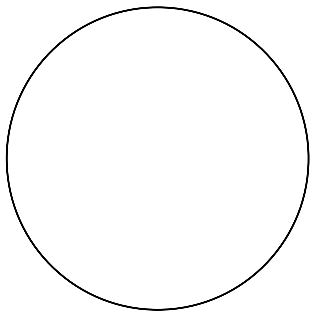
＝ 半径 $\sqrt{R^2 - z^2}$ の n-1 次元球の体積

$$= AR^{n-1}\sqrt{1 - z^2/R^2}^{\,n-1}$$



球と立方体の体積

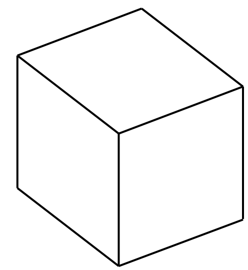
半径 R の球



$$V = \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!} R^N \qquad (N\text{: 偶数})$$

$$\log V = N \log_e R - \frac{N}{2} \log_e \left(N / 2\pi e \right)$$

一辺 $\dfrac{R}{\sqrt{N/2\pi e}}$ の立方体



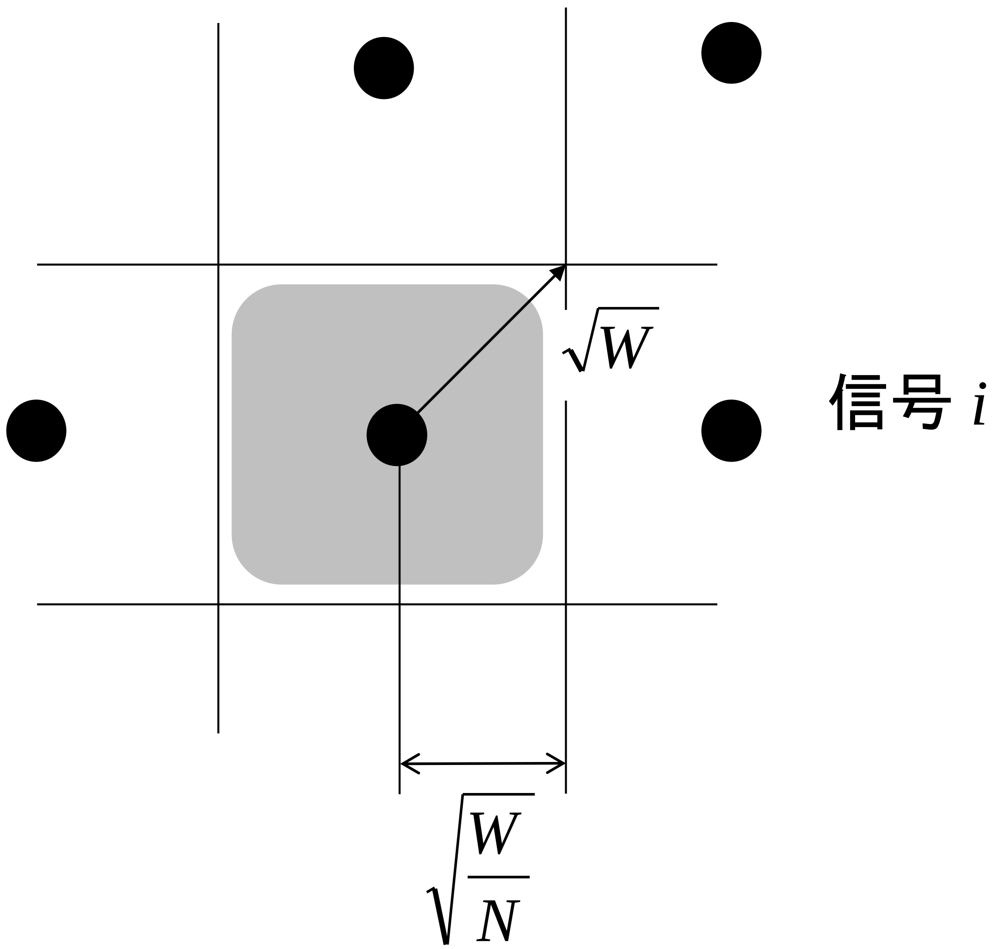
$$V = \frac{R^N}{(N/4\pi e)^{N/2}}$$

$$\log V = N \log_e R - \frac{N}{2} \log_e \left(N / 2\pi e \right)$$

対数をとると等しい

6. 直交格子による分割

- 隣の信号までの距離を $(W/N)^{1/2}$ 程度まで近づけてもノイズ球の重なりの体積は小さい



（信号＋ノイズ）の存在範囲の体積

$$\log \frac{A(N)\left(\sqrt{S+W}\right)^N}{\left(\alpha\sqrt{\frac{W}{N}}\right)^N} = \log\sqrt{\frac{S+W}{W}}^N = \boxed{\frac{N}{2}\log\left(1+\frac{S}{W}\right)}$$

一辺 $\alpha\sqrt{\frac{W}{N}}$ の多次元立方体の体積

$\alpha = \sqrt{2\pi e} = 4.13$ とすると

半径 $\sqrt{W}$ の球の体積に等しい

今回の講義のまとめ

パターン $\mathbf{x}$ から読み取れる情報量は，$\mathbf{x}+\mathbf{w}$ が動き得る空間をノイズ領域で分割した個数で評価できる．