計測情報処理論 講義資料

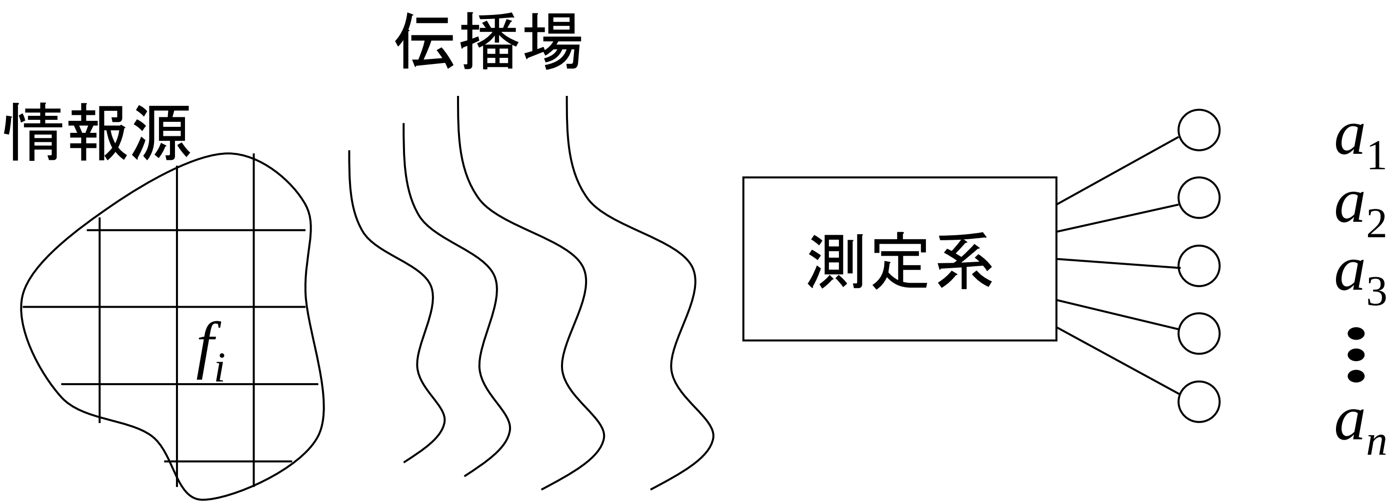
第2章　ノイズの中での情報伝達

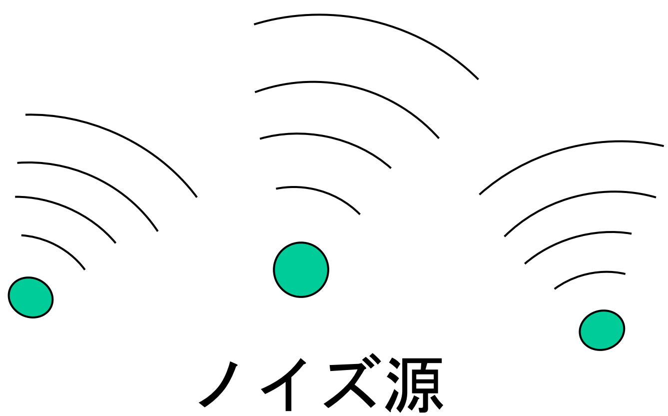
篠田 裕之

https://hapislab.org/public/hiroyuki_shinoda/keisoku_joho

hiroyuki_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp

線形系におけるパターン計測





ノイズ

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & h_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ f_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vdots \\ w_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

測定値 ***a*** から ***f*** を求める

１．情報量とは

ある媒体に記録可能な情報量が ｎ ビットである

⇕

区別できる状態*が　2^n とおり存在する

ハードディスク、メモリ
本
音楽 CD
レコード？

＊各状態と事象（意味）との対応表は別途作成する

1. 情報量とは

情報量の1つの指標

$$I = \log_2(\text{区別できる状態の総数})$$

対数をとる意義

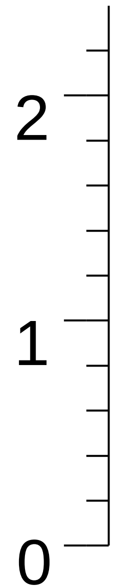
・記録デバイスの数や面積に比例

２．ノイズの中で伝達可能な情報量

１）スカラー計測の場合

電圧測定値 V

電圧範囲 0 ～ V_0 [V]



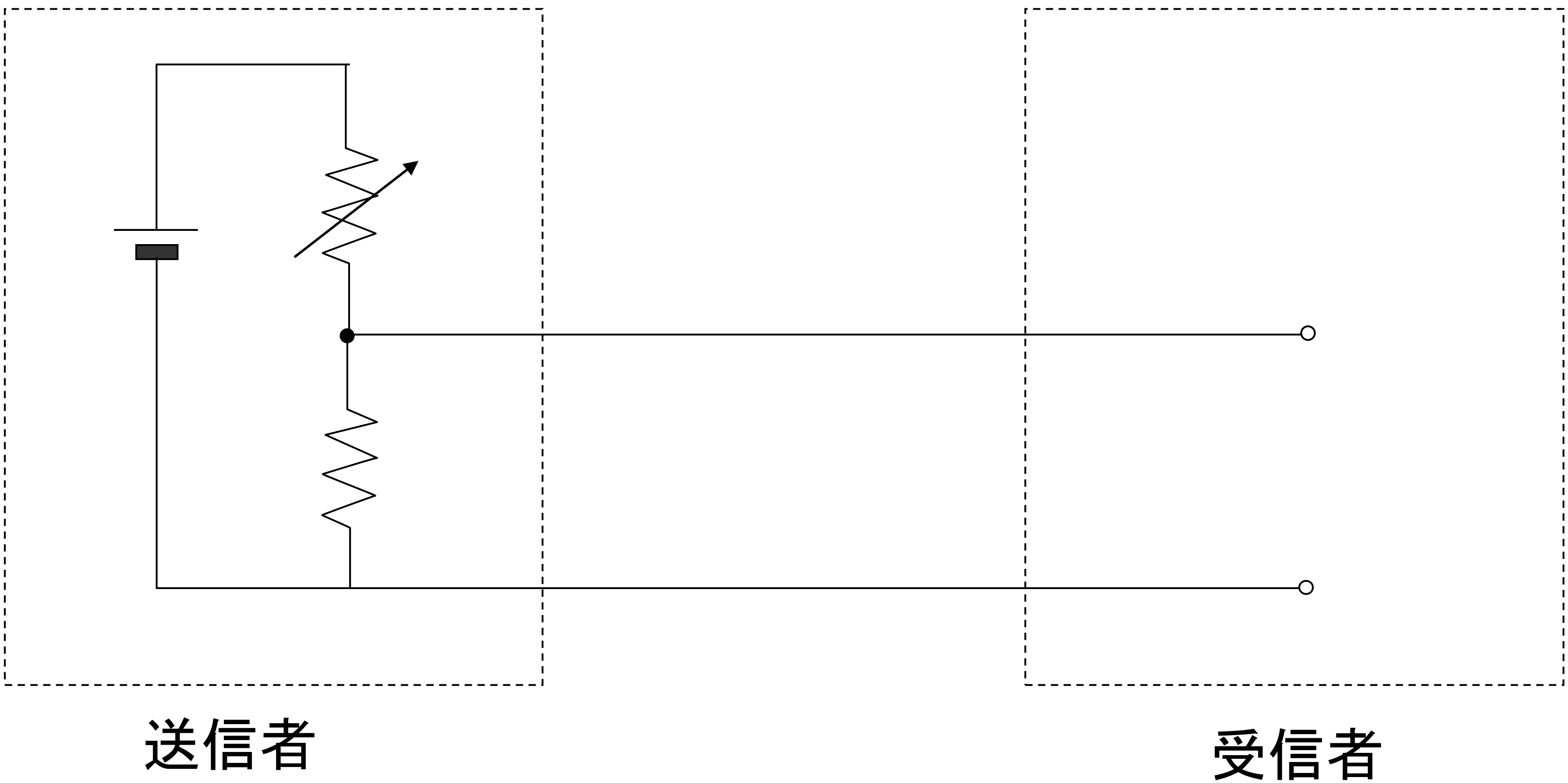
見分けられる電圧値の数 I は

$$I = \infty\,?$$

２．ノイズの中で伝達可能な情報量

電圧値による通信

送信者が設定した一定電圧を受信者が読み取ることで情報を伝達する。



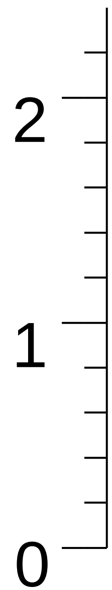
一瞬で無限大の情報が伝達できる？？

2.1 スカラー計測の場合

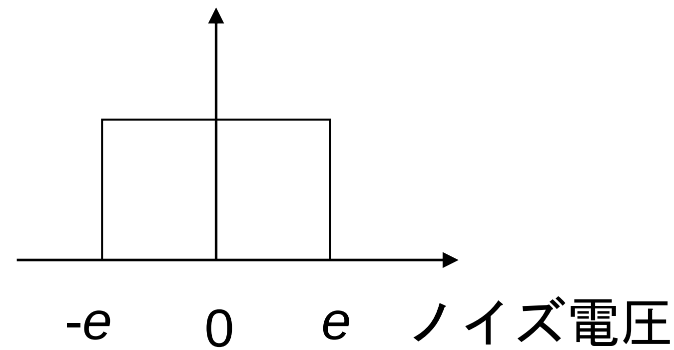
ノイズが存在する場合

電圧測定値 V

電圧範囲 0 ～ V_0 [V]



ノイズ電圧の確率密度



上記ノイズ電圧確率密度のもと
1回の測定で識別可能な電圧値

最大 $\dfrac{V_0}{2e}$ 通り

2.1 スカラー計測の場合

$\dfrac{V_0}{2e}$ とおりの電圧を設定できるポテンシオメータは

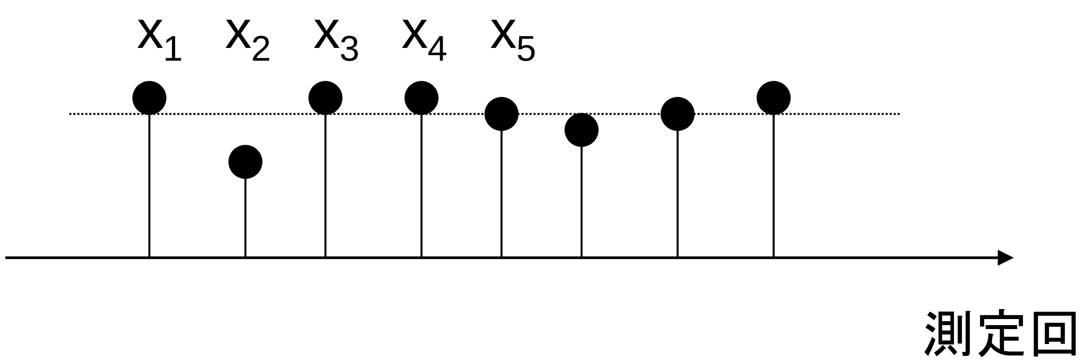
$\log_2 \dfrac{V_0}{2e}$ ビット　のメモリと等価

2.2 受信者が時間平均値を取得できる場合に伝達可能な情報量

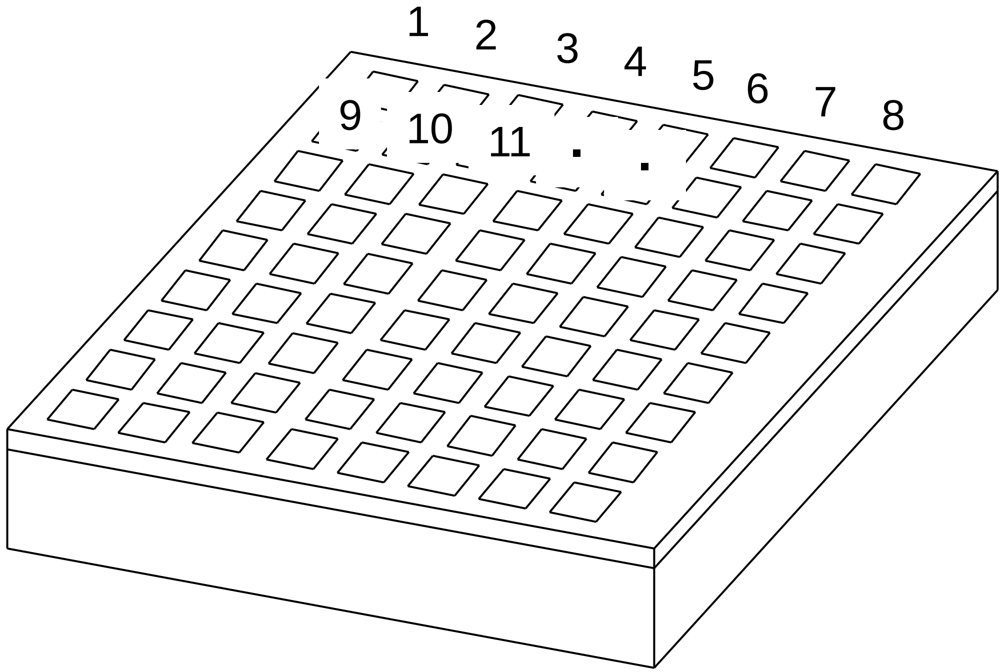
〇 先験情報：電圧値は時間的に一定

〇 n 回測定を繰り返し、記録する

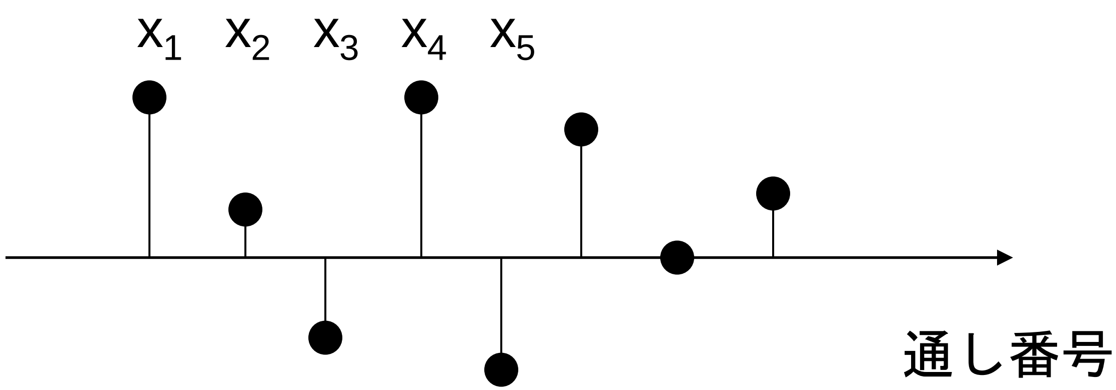
〇 各時刻のノイズはランダム（白色）で信号と無相関



上記の場合に識別可能な電圧値の数は、
1回測定の場合の $\sqrt{n}$ 倍になる

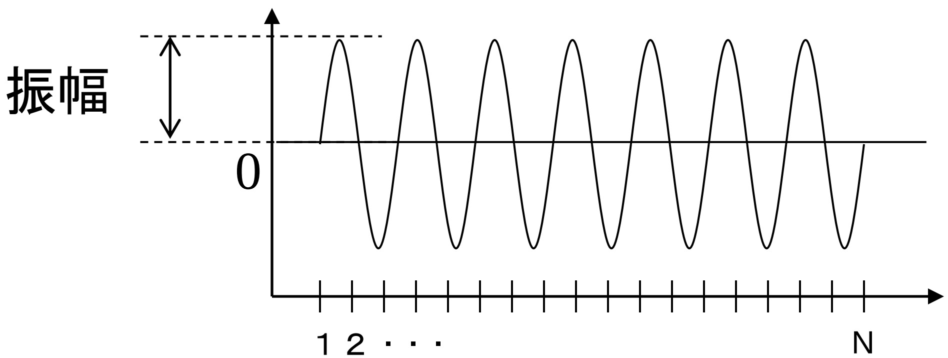


何についての平均か？
時間、空間、試行、・・・



3. 変調方式と伝達可能な情報量

① 決まった波形の振幅で情報を伝える （含：直流波形）



AM変調
(Amplitude Modulation)

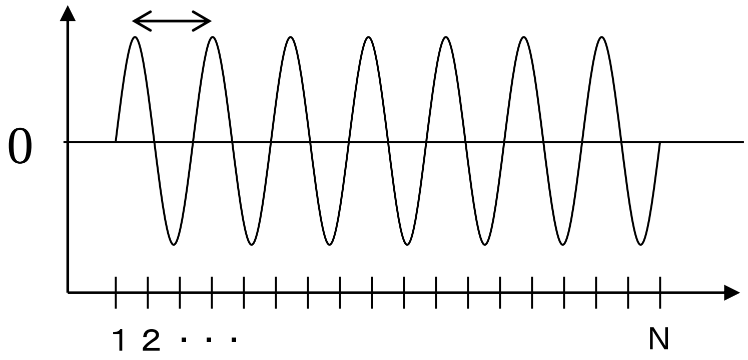
--- 振幅で情報を伝える

$$s(n) = a\phi(n)$$

スカラー

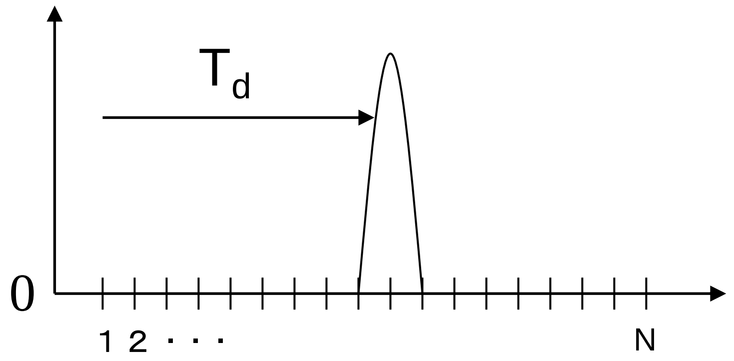
- $\phi(n)$ は正弦波に限らず、どんな波形でもよい。

② 周波数で情報を伝える



FM変調
(Frequency Modulation)

③ 信号の発生時刻で情報を伝える



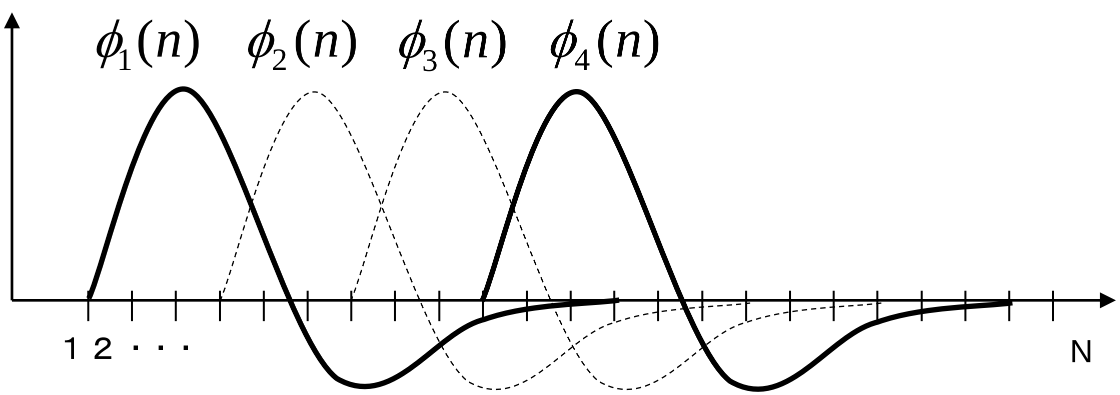
PIM
(Pulse Interval Modulation)

④ m 個の直交信号波形 $\phi_i(n)$ の組み合わせで情報を伝える

例：$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1,0,0,1)$ を伝送する信号波形

$$s(n) = c_1\phi_1(n) + c_2\phi_2(n) + c_3\phi_3(n) + c_4\phi_4(n)$$

$$= \quad \phi_1(n) \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad \phi_4(n)$$



3. 変調方式と伝達可能な情報量

各方式によって何ビットの情報が伝送可能か？

[1] 信号長は N 点

[2] ノイズは信号と無相関で白色.
エネルギーは W

[3] 信号のエネルギーは S 以下

① 一つの振幅値によって伝達可能な情報量

- $s(n) = a\phi(n)$ とし、スカラー a を読み取らせることで情報を伝達する
- $\phi(n)$ はあらかじめ受信者も知っているものとする

スカラー a をどれだけ細かく設定できるか？

$\phi(n)$ を含む正規直交基底で観測信号を展開する

↓

観測量 $p(n)$

$$p(n) = s(n) + w(n)$$

真値　　ノイズ

$p(n)$ を以下のように展開することはつねに可能

$$p(n) = p_1\psi_1(n) + p_2\psi_2(n) + \cdots + p_N\psi_N(n)$$

勝手に作った正規直交ベクトル
（互いに直交する $N-1$ 本のベクトル）

$\varphi_1(n) = \phi(n)$ となるように φ_1 を選ぶ

一つの自由度に分配されるノイズエネルギの期待値
$= \psi_i\ (n)\ (i = 1,2,\cdots,N)$ に平行な成分のエネルギの期待値

$$\overline{w_i^2} = \frac{W}{N}$$

- ノイズがランダムであることを仮定
- 分布が正規分布である場合、たとえば

  $|w_i| > 2.58\sqrt{W/N}$

  となる確率は１％

前スライド補足　～ w_i の確率分布

直交基底 $\psi_1(n), \psi_2(n), \cdots, \psi_N(n)$　($\sum_{n=1}^{N}\{\psi_i\,(n)\}^2 = 1$)
を用いて

$$w(n) = w_1\psi_1(n) + w_2\psi_2(n) + \cdots + w_N\psi_N(n)$$

と展開したとき

$$w_i = \sum_{n=1}^{N} w(n)\psi_i(n)$$

で与えらえる。
確率変数 $w(1), w(2), \cdots, w(N)$ のそれぞれについて、確率分布の分散が σ^2 であるとすると、大きな N について w_i の確率分布は正規分布となり、その分散 σ_i^2 は

$$\sigma_i^2 = \sum_{n=1}^{N} \sigma^2\{\psi_i\,(n)\}^2 = \sigma^2 = \frac{W}{N}.$$

である。

誤りなく読みとれる振幅の段階数の最大値（白色雑音の場合）

波形 ϕ の形状によらず

$$N_{\mathrm{AM}} = \frac{2\sqrt{S}}{r \cdot 2\sqrt{W/N}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{NS}{W}}$$

＊上式の r は、1より極端には大きくない値として仮にここで設定した値。より詳しくは後で考察する。たとえば $r = 2.58$ に設定すると、ノイズによって1段階読み誤ってしまう確率は 1% となる。

① 一つの振幅値によって伝達可能な情報量

$$I_{\mathrm{AM}} = \log_2 N_{\mathrm{AM}} = \log_2 \sqrt{\frac{NS}{W}} \quad \text{ビット}$$

（r は省略）

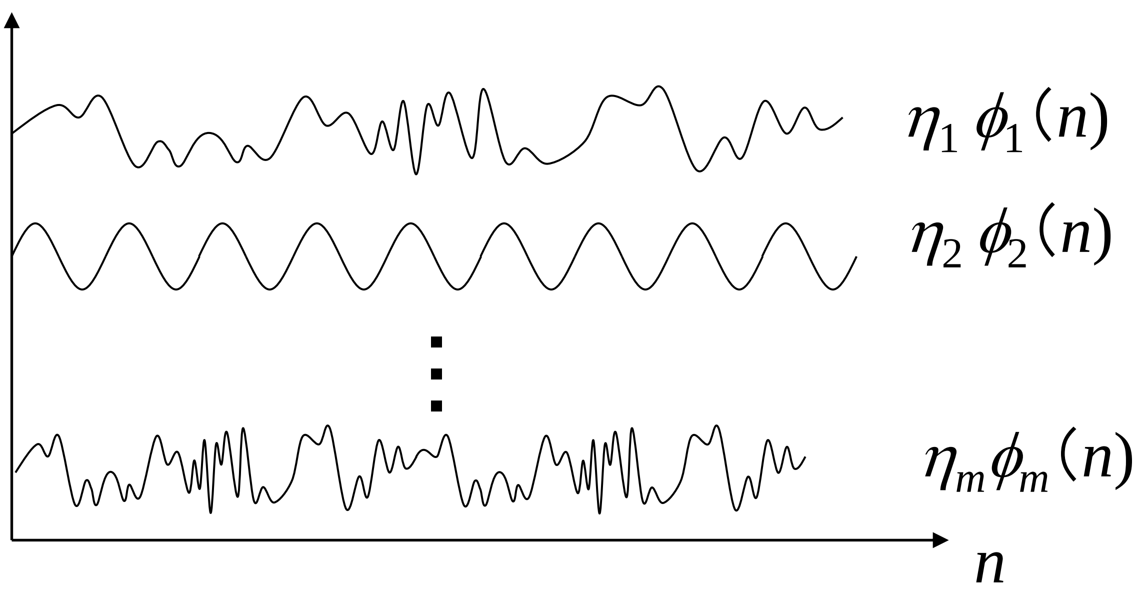
- N 点の離散信号を仮定
- ノイズは各点の値が完全にランダムであることを仮定。例えば特定の帯域のみに偏っている場合にはそのまま適用できないので注意が必要。

④ 直交信号の組み合わせで情報を伝送する

波形が既知である信号を使い、確実に見分けられる 2 状態（1ビットの情報）を伝えるための、信号の最小強度は以下で与えられる

$$\eta_i^2 \approx r^2 \frac{W}{N} \equiv \eta^2 \quad (\|\phi_i\| = 1,\ i = 1,2,\cdots)$$

- 上式の r は、1より極端には大きくない値として仮に設定した値



$S < W$ のとき

互いに直交する m 個の関数 $\{\eta\phi_1, \eta\phi_2, \ldots, \eta\phi_m\}$ を用意し、

$$s(n) = a_1\eta\phi_1(n) + a_2\eta\phi_2(n) + \cdots + a_m\eta\phi_m(n) \qquad (\ a_i = 1 \text{ or } -1\ )$$

によって2進数 $d_1 d_2 \cdots d_m$（ m ビットの符号）を伝達する。
m がなるべく大きくなるよう、η は2状態を区別できる最小値とする。

- $d_1 d_2 \cdots d_m$ は、$a_i = 1$ のとき $d_i = 1$、$a_i = -1$ のとき $d_i = 0$ のように対応させた2進数

$S > W$ のとき

N 次元の空間を張る正規直交基底 $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N\}$ を用意する。
各基底関数 ϕ_i に、

$$-\sqrt{\frac{S}{N}} < b_i < \sqrt{\frac{S}{N}} \ .$$

の重みをつけ、以下のような信号を送信する。

$$s(n) = \sum_{i=1}^{N} b_i \phi_i(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

受信側は各 b_i を観測する。ここで b_i は離散的な値をとるものとし、ノイズが加算されてもそれらが正しく
同定されるような間隔で設定されている。

➢ OFDM と呼ばれる信号伝送方式について調べてみよう

④ 直交信号の組み合わせで伝達される情報量

[1] $S < W$ のとき

m 個の信号成分について、その2状態の選択の仕方で情報を伝える場合

$$m = \frac{S}{\eta^2} = \frac{SN}{r^2 W} \quad \text{ビット}$$

[2] $S > W$ のとき

N個の各基底成分に最大エネルギー $\frac{S}{N}$ を分配し、その強度を読み取る場合

$$\log_2\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{S}{W}}\right)^N = \frac{N}{2}\log_2\frac{S}{r^2 W} \quad \text{ビット}$$

考察

$S < W$ の場合に、前述の方法にかえて

ϕ_i の信号振幅をノイズ振幅(ϕ_i に平行な成分の振幅)の $2k+1$ 倍とし、(その分 m は減る)それぞれが $2k$ 段階の強度を伝達すると、伝送可能な情報量はどうなるか？

信号エネルギが一定であれば、
同時に送れる直交信号の最大数 m' は

$$m' = \frac{1}{(2k+1)^2} m$$

したがって、伝送可能な情報量は

$$\log_2 (2k)^{m'} = \frac{1}{(2k+1)^2} m \log_2 (2\mathrm{k}) \quad \text{ビット} \quad < m$$

＊この結果から何が言えるか？

例題

ある生物が体液中の3種類の化学成分濃度 (x_1, x_2, x_3) [%] を自律的に変化・保持させることにより一種の記憶動作を行っているものとする．体内にはそれらの濃度に対して

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

のように (y_1, y_2, y_3) を出力する3種類のセンサがあり，感覚系の上位機構は (y_1, y_2, y_3) の各成分値を ± 0.1 程度の精度で検出できるものとすると，この記憶系が一回の動作で記録可能な情報は最大何ビットか？

なおx_i は $0 < x_i < 10$ なる範囲の値を自由にとることができるものとし，各成分の読み取り誤差間に相関は無いものとする．