計測情報処理論 講義資料

第1章　信号とノイズ

篠田 裕之

https://hapislab.org/public/hiroyuki_shinoda/keisoku_joho

hiroyuki_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp

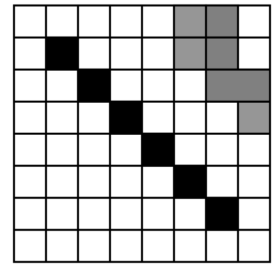
講義の進行

6/4	計測情報処理とは？ 何が問題か？
6/11	信号とノイズ ①
6/18	信号とノイズ ②
6/25	アナログパターンの情報量
7/2	休講
7/9	計測の直交性

計測に共通する問題の整理と思考の道具を提供

「パターン」の計測

１）空間的なパターン

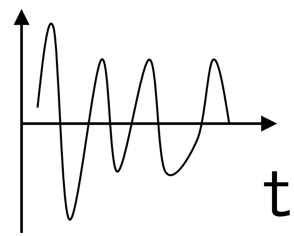


例：画像

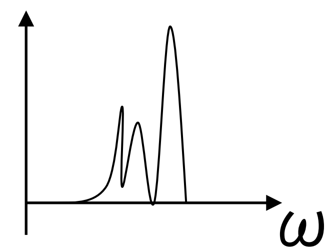
静止画 -- ２次元

動画 --- ３次元

２）時間的なパターン



時間軸でのパターン



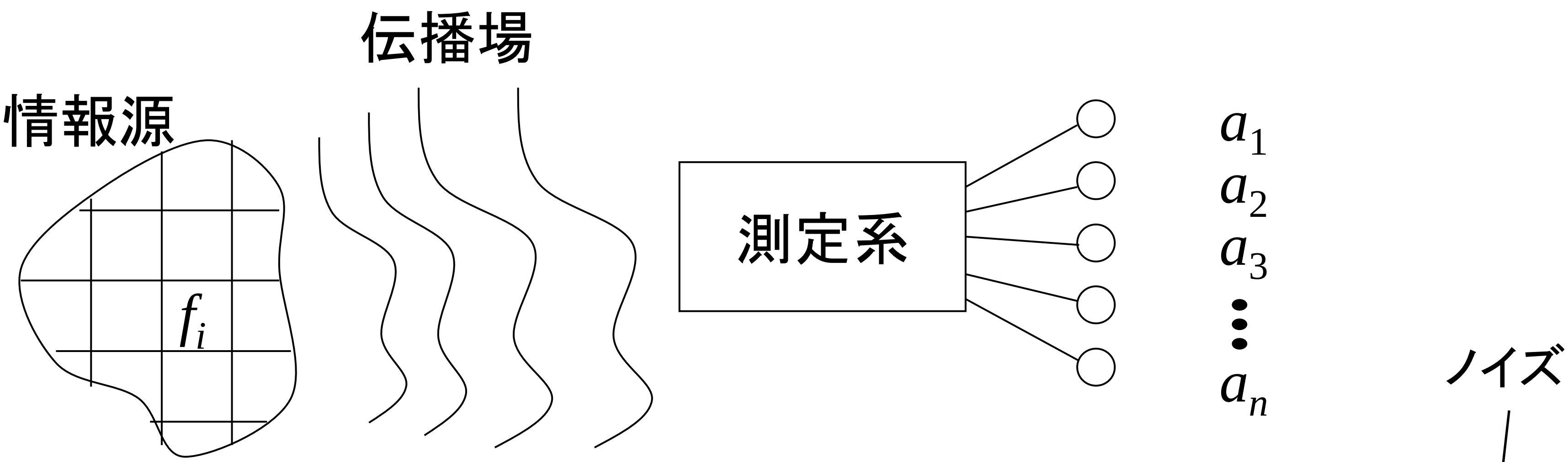
周波数軸でのパターン

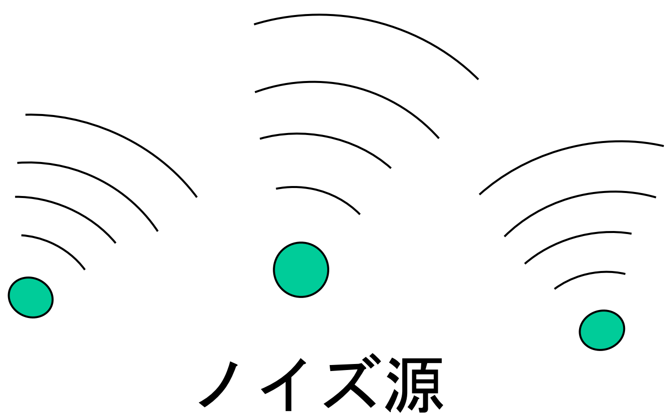
３）物理的パラメータのパターン

光のスペクトル、力ベクトル

４）上記の複合的なパターン

線形系におけるパターン計測





$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & h_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ f_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vdots \\ w_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

測定値 $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{f}$ を求める

パターン計測の例

検出物理量による分類	利用する現象による分類	最終的に知りたい情報による分類
温度、熱量	波動の反射・透過・吸収	雲の分布、山林の植生
電磁波、光、電場、磁場	X線の吸収	星の位置とスペクトル
音場	共振	物体表面の温度分布
力、圧力	核磁気共鳴	自動車の走行状態
変位、振動（固体、液体、気体）	オームの法則	生体組織の状態
速度、加速度、角速度 位置座標	光電効果	思考する脳の状態
弾性、粘性	干渉	物体の形状
時間、周波数	モアレ	環境の3次元モデル
	黒体放射	運転者の疲労
	熱電効果	ロボットの位置
	フックの法則	部材・装置の姿勢
	圧電効果	人間の行動
	トンネル効果	・・・
	・・・	

「計測」と「通信」

[計測]　対象の状態が反映された信号から対象の状態を知る

[通信における受信]
情報を発信する装置からの信号を受け取り、送信者が伝えたかった情報を知る

携帯電話、Wi-Fi、Bluetooth、ITS、ICタグ

[境界が曖昧な例]　人工物の計測、センサネットワーク
テレメトリー、GPS

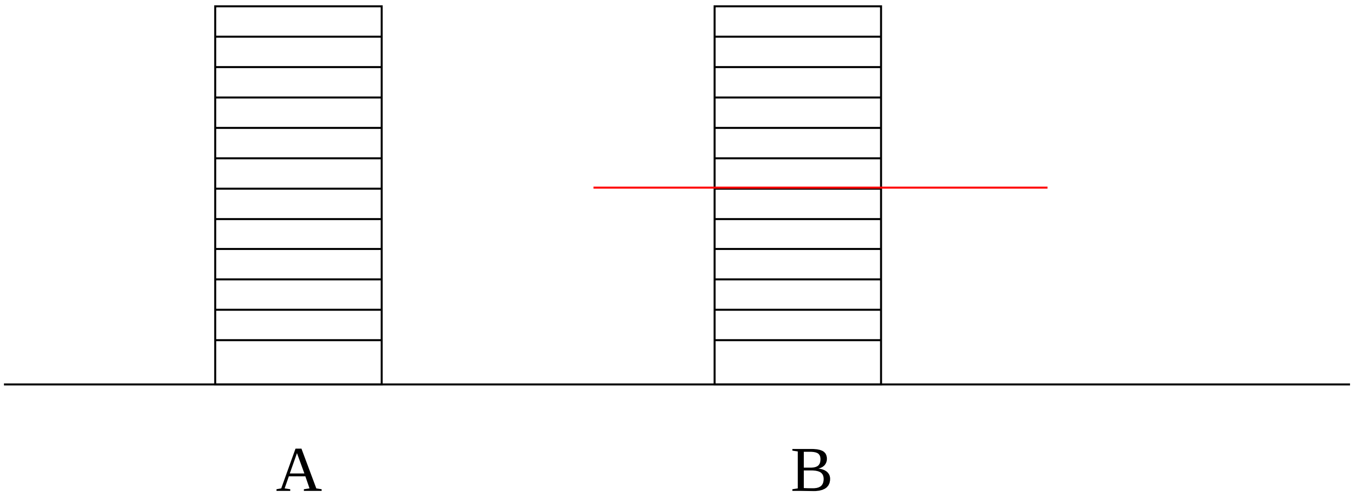
白色雑音の中で 信号の振幅を計測する

＜目標＞

「ノイズを減らしたければ平均化すればよい」
という“ノウハウ”を

「計測限界を評価する」に進化させる

クイズ

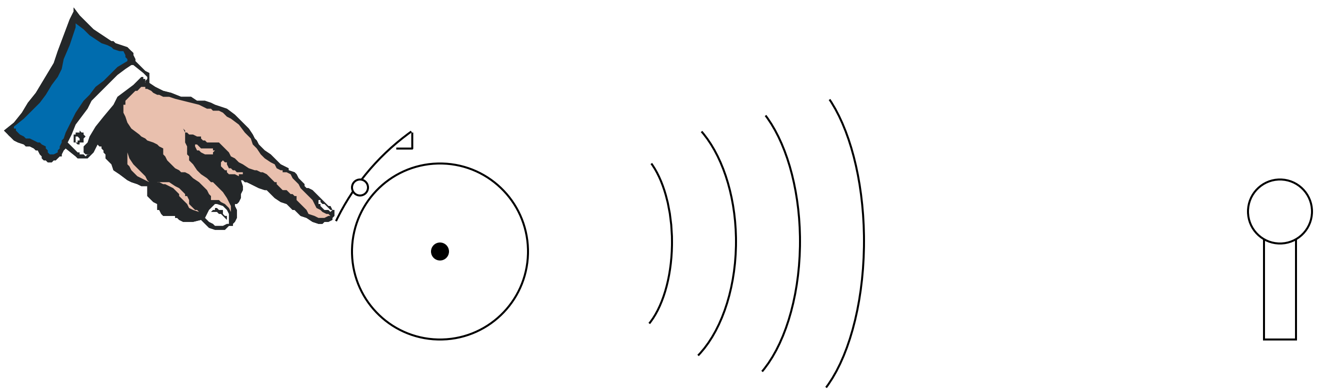


3割が表
7割が裏

半分から上が表、下が裏

コインを見ないでA, B間でコインを入れ替えたりひっくり返したりしてＡ, Bともに表と裏が半分ずつ入るようにするにはどうすればよいか？

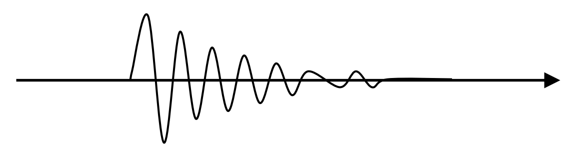
同期加算という古典的テクニック



- $p(t) = s\,(t) + w(t)$ が観測される
- 信号長は有限であり、信号が発生するタイミングは別の観測量によってわかっている
- 信号波形がいつも同じであることは先験的にわかっている

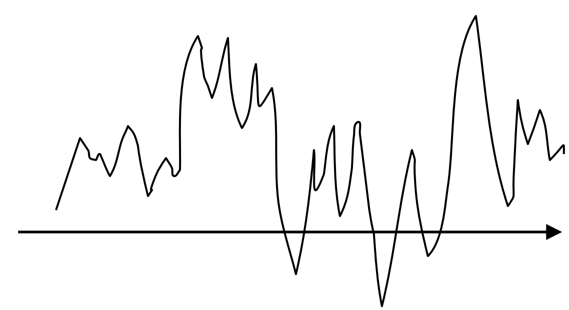
$s\,(t)$

信号



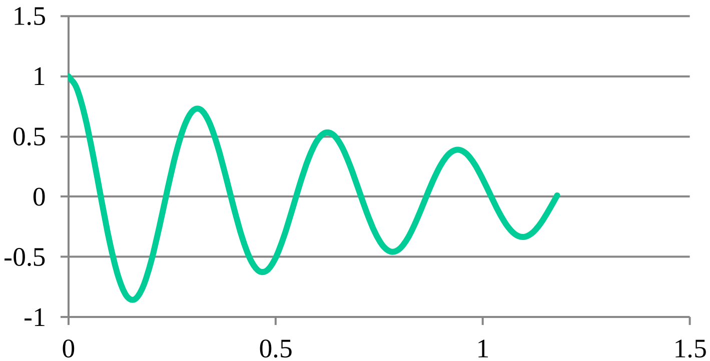
$w\,(t)$

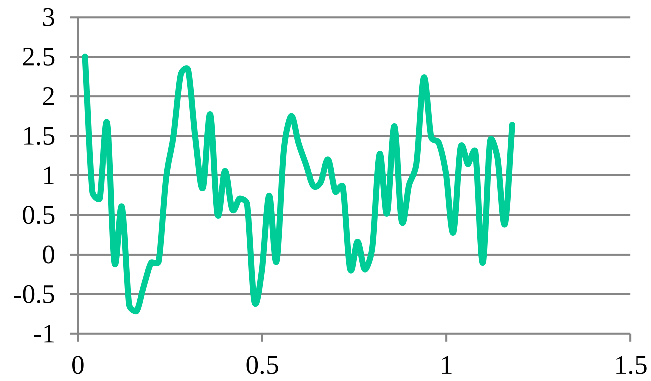
ノイズ



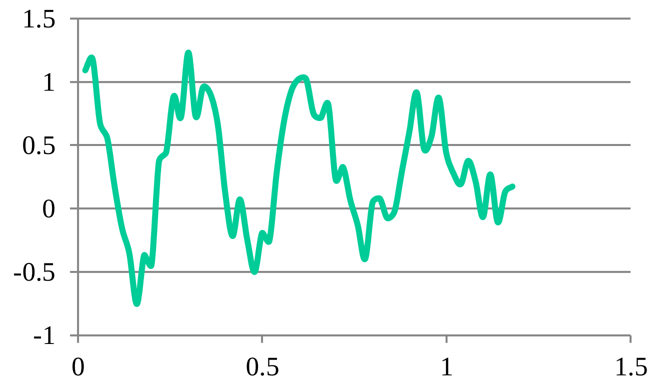
同期加算の例

信号

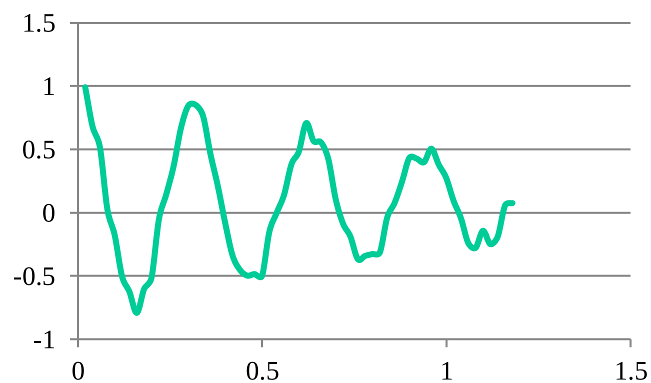




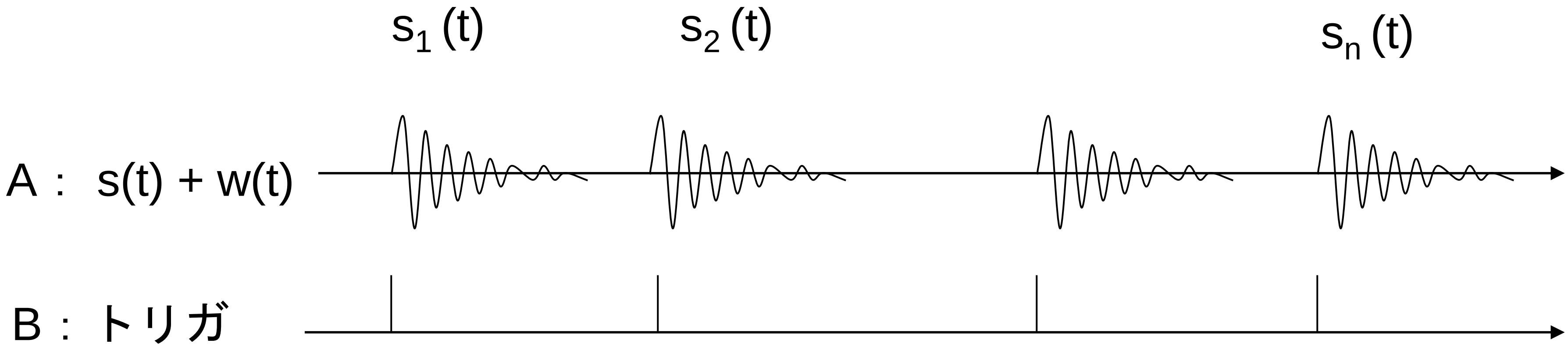
信号＋ノイズ
（同期加算なし）



10 回加算



100 回加算



$$Avg(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\{s_n(t) + w_n(t)\}$$

$$\rightarrow s(t) \;\; (N \rightarrow \infty)$$

同期をとって（タイミングを揃えて）波形を加算することを同期加算とよぶ。

注）$Avg(t)$ = (信号系列 A と B の相関関数)　とも見れる

同期加算が行われている例

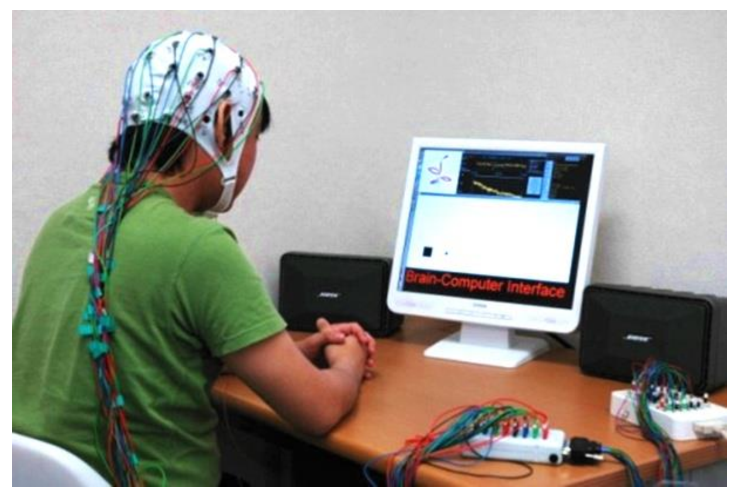
デジタルオシロスコープ

刺激に対する生体の応答

脳波、心電、筋電 、MEG….

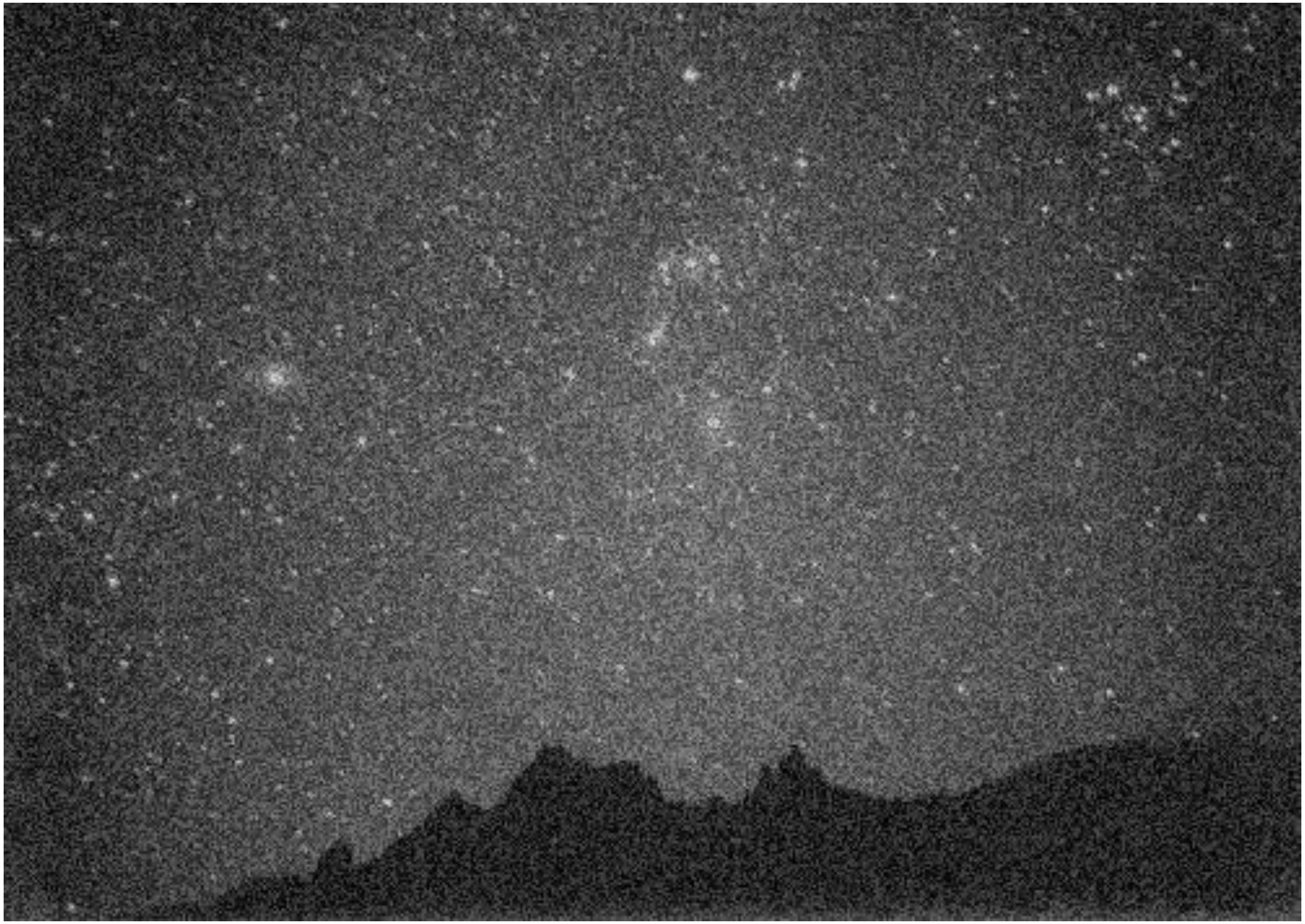
超音波による非破壊検査

⋮



画像計測の例

熱雑音の加算された画像



100枚の画像の平均

計測のモデル（1）

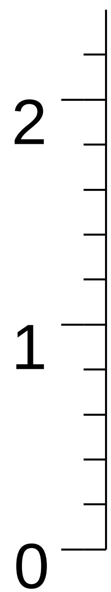
ある端子間の電圧を測定する。
観測される電圧 p は s を真の値、w をノイズとして

$$p = s + w$$

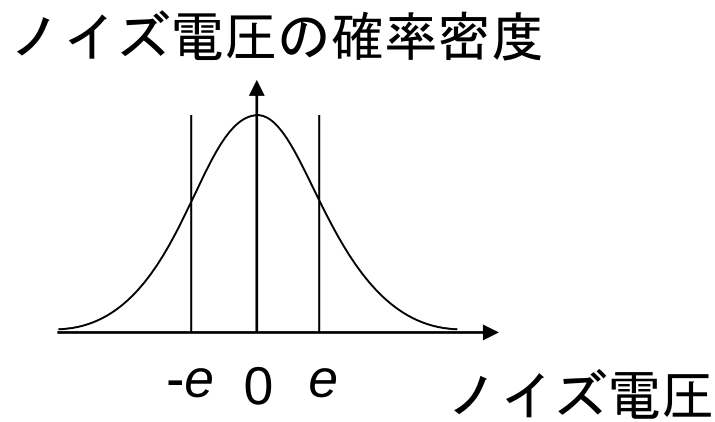
で与えられる。

電圧測定値 p

電圧範囲 0 〜 V_0 [V]



ノイズ電圧確率密度の一例



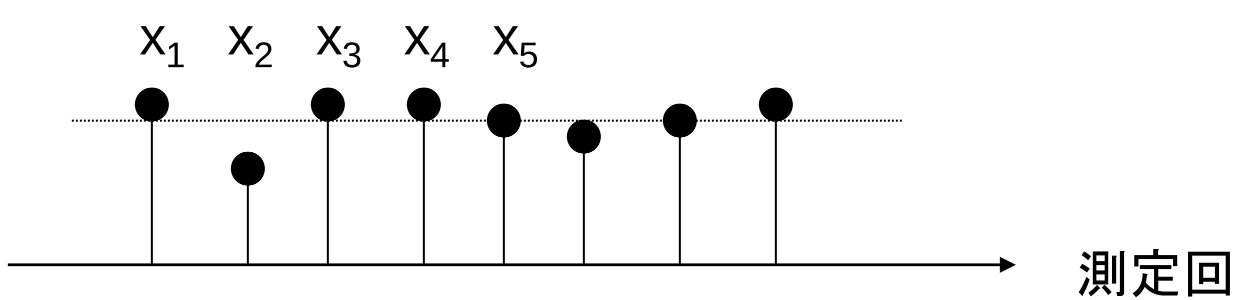
中央極限定理を利用する計測技術

w がランダムな値であるならば、多数回繰り返して計測し、平均値をとることで精度は向上する

○ 先験情報：電圧値は時間的に一定

○ n 回測定を繰り返し、記録する

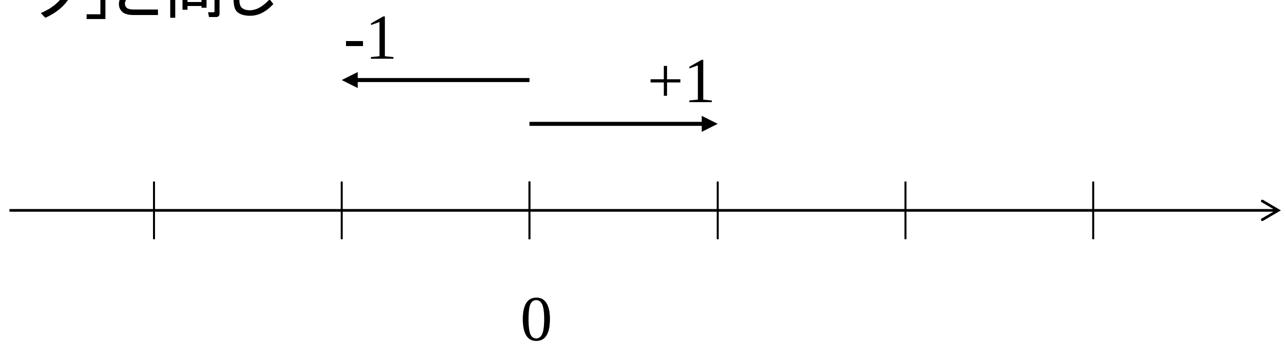
○ 各時刻のノイズはランダム



n 回測定の平均値の誤差の標準偏差は 1回測定の場合の $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 倍になる

特殊な確率分布についての証明

誤差 w が、等確率で $w = +w_0$ または $w = -w_0$ となる場合は「ランダムウォーク」と同じ



$d(n)$: n 回試行後の位置 $d(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \ a_i = \pm 1$

$d(n)$ の期待値: $E[d(n)] = 0$

$d(n)$ の分散::

$$V[d(n)] = E[\{d(n)\}^2] = E[a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2] = n$$

一般の場合

平均 0, 分散 σ^2 の n 個の独立な確率変数 w_i の和

$$w = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

を考えよう。

w の平均: $E[w] = 0$

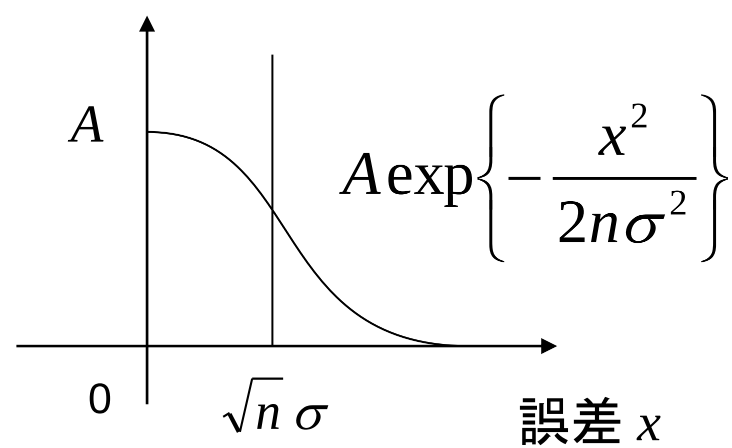
w の分散: $V[w] = E[w^2] = E[(w_1 + w_2 + \cdots + w_n)^2]$

$$= E[w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2]$$

$$\left(E[w_i w_j] = 0 \ \text{ for } \ i \neq j\right)$$

$$= n\sigma^2$$

したがって、w の標準偏差は
$\sqrt{n}$ に比例する



n 回測定の和の誤差分布

ここまでのまとめ

真値が一定であり、そこにランダムなノイズが加算されて計測される場合、n 回の計測を行ってその平均をとると、誤差（の標準偏差）は $1/\sqrt{n}$ に比例して小さくなる。

＊ただし、毎回の計測でノイズはランダムな値をとらなければこれは成り立たない。

ここからの話

「真値が一定のとき」から
「真値が決まったパターンをなす」場合に拡張

注意

「同期加算」は、トリガーの時刻を基準としてそこから時間 t 経過した後の信号の真値 $s(t)$ が、一定であることを仮定している。その意味で「真値が一定」の例の一つであって、「未知の波形」$s(t)$ を計測することが目的。

ここからの話は、真値が一定ではないが、その波形が $s(t) = A\phi(t)$ （A：未知、$\phi(t)$：既知）である場合に A を推定する問題。（同期加算とは直接関係がない）

計測のモデル（2）

ある端子間の電圧を測定する。観測値は

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{w} \quad （N\text{ 次元ベクトル}）$$

である。

$\boldsymbol{p}$ ： N 個の観測データを並べた N 次元ベクトル
$\boldsymbol{s}$ ： 真値（信号）
$\boldsymbol{w}$ ：白色雑音　 -------- $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{w}$ は独立

信号エネルギ　$S = ||\boldsymbol{s}||^2 = \sum_{i=0}^{N-1} s_i^2$

ノイズエネルギ　$W = ||\boldsymbol{w}||^2 = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^2$

問題1

信号 $\boldsymbol{s}$ は N 個のデータからなる N 次元ベクトルであり、

$$\boldsymbol{s} = A\boldsymbol{\phi}$$

（ただし $||\boldsymbol{\phi}|| = 1$ であり、A は定数）

であることがあらかじめ分かっている（$\boldsymbol{\phi}$ は既知であり、A は未知である）とき、エネルギ W の白色雑音のもとで検出可能な信号エネルギの最小値を求めよ。ただし $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{w}$ は互いに相関がないものとする。

答

ノイズ $\boldsymbol{w}$ は以下の成分に分解できる。

$$\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{w}'$$

ここで $\boldsymbol{w}'$ は $\boldsymbol{\phi}$ と直交する成分（ベクトル）である。
測定値から A を決定する際、上記 a が不可避の誤差となる。
真値 $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{w}$ は無相関であるとすると a^2 の期待値は

$$E[a^2] = \frac{W}{N}$$

で与えられる。

したがって、ノイズの中で信号の存在を確認するためには
信号エネルギ S は W/N より大きくなければならない。

（ここまでのポイント）

一つの自由度に分配されるノイズエネルギの期待値

$$E[a^2] = \frac{W}{N}$$

- N 点の信号を仮定
- ノイズの各点の値がランダムであることを仮定
- 分布が正規分布である場合、たとえば

  $$|w_i| > 2.58\sqrt{W/N}$$

  となる確率は１％

（補足説明 1）

観測値 $\boldsymbol{p}$ を以下のように展開することはつねに可能

$$\boldsymbol{p} = p_0\boldsymbol{\phi} + p_1\boldsymbol{\varphi}_1 + p_2\boldsymbol{\varphi}_2 + \cdots + p_{N-1}\,\boldsymbol{\varphi}_{N-1}$$

信号に平行な
単位ベクトル

勝手に作った正規直交ベクトル

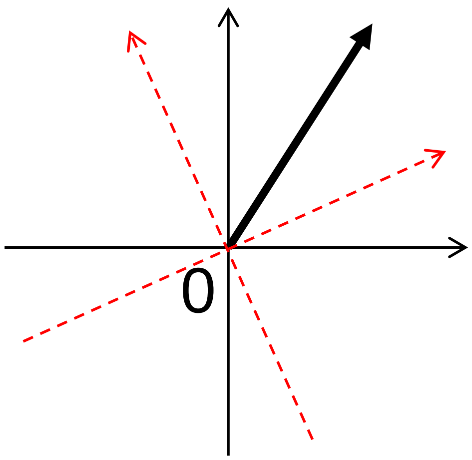
$$\boldsymbol{f} = a_1\boldsymbol{\varphi}_1 + a_2\boldsymbol{\varphi}_2 + \cdots + a_N\,\boldsymbol{\varphi}_N$$

のエネルギー

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2$$

は、直交系 $\boldsymbol{\varphi}_i$ の選び方に依存しない

（Parseval‘s theorem）



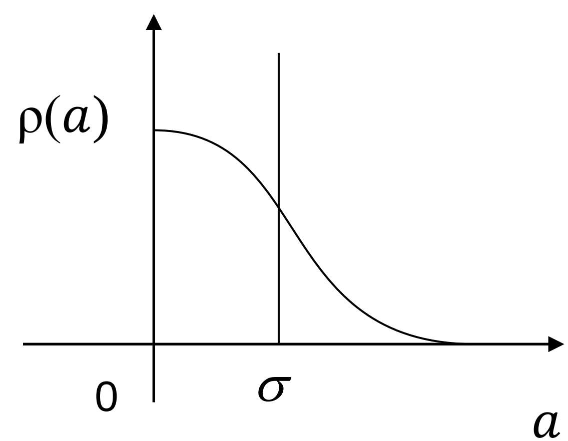
$\rho(a)$: a の確率密度

前スライドのパラメータ a は以下のように与えられる。

$$a = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\phi} = \sum_{i=0}^{N-1} w_i \phi_i$$

もし w_i と w_j $(i \neq j)$ が独立であり、それぞれの分散が σ^2 であるならば、N が増大するにつれて $\rho(a)$ は分散 σ^2 のガウス分布に収束する。(Central limit theorem)

$$\rho(a) \to \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\}$$



＊ $||\boldsymbol{\phi}|| = 1$ に注意

前スライドのパラメータ a の分散

$$E[a^2] = E[(w_0\phi_0 + w_1\phi_1 + \cdots + w_{N-1}\phi_{N-1})^2]$$

$$= E[(w_0\phi_0)^2 + (w_1\phi_1)^2 + \cdots + (w_{N-1}\phi_{N-1})^2]$$

$$\left(\because\ E\left[w_i w_j\right] = 0 \ \text{ for } \ i \neq j\right)$$

$$= \sigma^2(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_n^2)$$

$$= \sigma^2$$

＊以下、理解の確認のため、 $\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{\phi}$ の表記を変更する

<u>問題 1-a</u>　信号強度推定、AM計測

エネルギ W の白色雑音のもとで信号の実効値を計測する。このときの計測誤差を求めよ。

ただし「信号波形が $s(n) = A\phi(n)$ であり A が未知」であることが前提。（$n = 0, 2, 3, \ldots, N-1$)

＊この考察を、現実の問題に適用してみよう

＊以下のスライドでは、$s(n)$ や $\phi(n)$ などのデータ系列を「N次元ベクトル」として扱う。

答 1-a

問題中の表記における A の最良推定値は

$$\overline{A} = \sum_{n=0}^{N-1} p(n)\,\phi(n)$$

であり、不可避の誤差の標準偏差は答1で示されているように

$$\sigma_A = \sqrt{E[a^2]} = \sqrt{\frac{W}{N}}$$

である。したがって推定される実効値 (= root mean square value, RMS) の誤差（の標準偏差）は

$$\sigma = \frac{\sigma_A}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{\mathrm{w}}}{N}$$

である。なお、信号の実効値は $\dfrac{A}{\sqrt{N}} = \sqrt{\dfrac{S}{N}}$ である。

演習問題

信号波形 $f(n)$ の「平均をとる」とは、

基底成分

$$\phi(n) = C$$

に平行な 成分を求めることと等価であることを示せ。

$\|\phi(n)\| = 1$ となるように C を決めると、$\phi(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}(1,1,\dots,1)$ である。
$f(n)$ に含まれる、$\phi(n)$ に平行な成分を $A\phi(n)$ とすると、

$$A = \sum_{n=1}^{N} f(n)\,\phi(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N} f(n)$$

であり、A を求めることと平均を求めることは（係数を除いて）同じことである。

- $f(n)$ の各成分のノイズ分散を $\sigma^2\left(= \frac{W}{N}\right)$ とすると、A の分散も σ^2
- 平均値 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n)$ の分散は $\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$

演習問題

観測データ $p(n)$ から信号振幅を推定する。
誤差エネルギ

$$E = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ p(n) - A\phi(n) \right\}^2$$

を最小化するように振幅を推定することと、$p(n)$ の $\phi(n)$ への射影を求めることは等価であることを示せ。

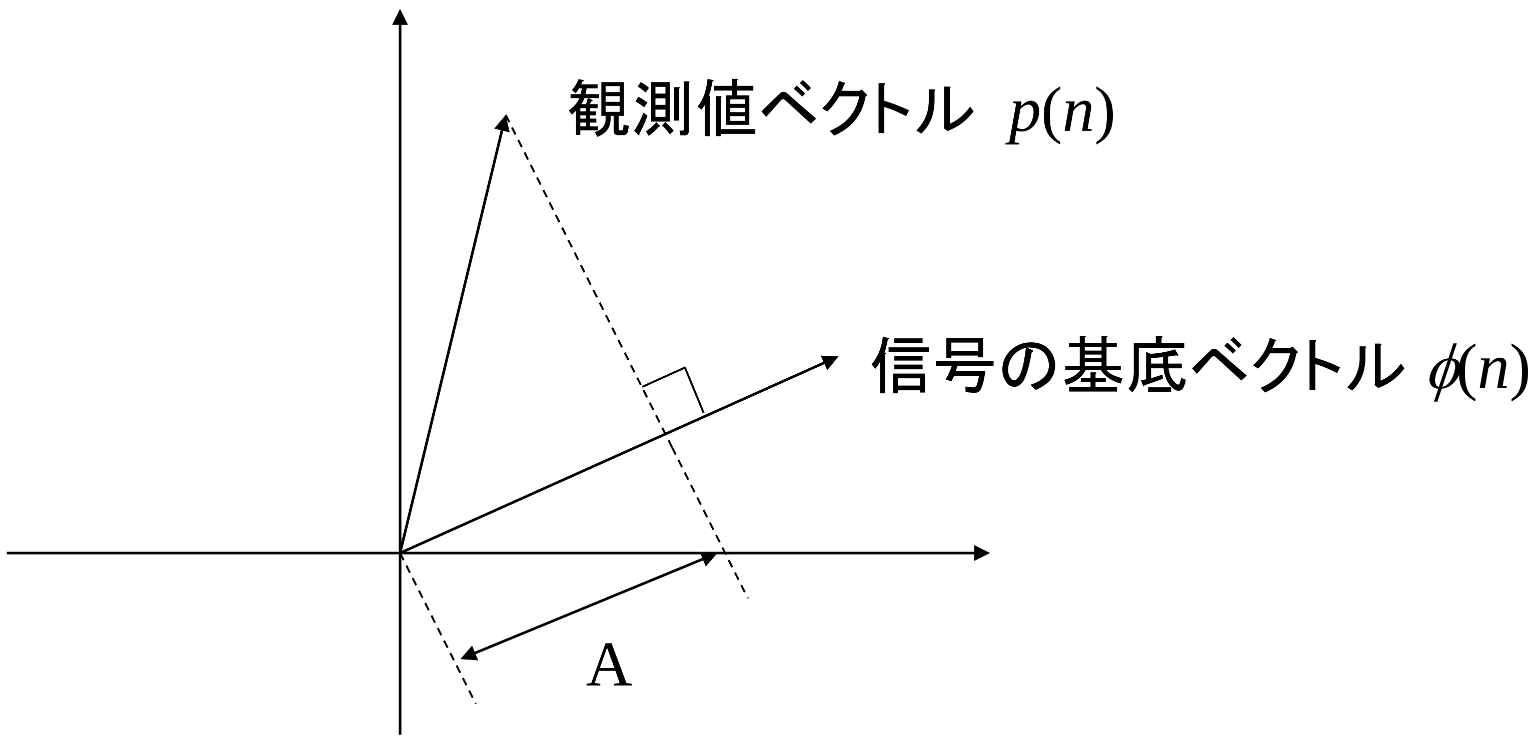
幾何学的に理解する（射影）

$$\sum_{n=0}^{N-1}\{p(n)-A\phi(n)\}^2$$

を最小化する A を求める

＝

$p(n)$ に含まれる $\phi(n)$ に平行な成分を求める



赤外線計測での応用例

環境光による計測誤差の影響を抑制する方法を提案し、そのときの計測誤差の理論値を示せ。

<u>問題2</u>

信号エネルギ S の正弦波信号の位相を計測する。信号にはエネルギー W の白色雑音が加算されているとすると、信号位相の推定値の誤差はどのように与えられるか。
ただし信号の周波数は f とする。

2の答

サンプリング後の信号（真値）を

$$s(n) = A\cos(Bn+\phi)\ , \quad \longleftarrow \quad B = 2\pi f\ /\ F_S$$

とする。位相を 微小量 $\Delta\phi$ シフトしたときの $s(n)$ の変化は

$$\Delta s(n) = A\cos\{Bn+\phi+\Delta\phi\} - A\cos(Bn+\phi)$$
$$\approx -A\Delta\phi\sin(Bn+\phi) \qquad (1)$$

で与えられ、そのエネルギは

$$E(\Delta\phi) = \sum_{n=1}^{N}\Delta s^2(n) \approx \frac{A^2N}{2}\Delta\phi^2 = S\Delta\phi^2$$

である。上記 $\Delta s(n)$ のエネルギが、ノイズに含まれる $\sin(Bn+\phi)$ に平行な成分のエネルギと等しいとすると、そのエネルギの期待値は

$$< E > \approx S < \Delta\phi^2 > = \frac{W}{N}$$

であるから

$$< \Delta\phi^2 > = \frac{W}{SN} \qquad \text{（Cramer-Rao bound）}$$

すなわち ϕ の推定において上記の誤差は不可避である。

＊ただしは $\Delta\phi$ は微小であり、式 (1) が成り立つことを仮定

一般的な原理

信号 $s_\beta(n)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ の測定値からパラメータ β を推定する計測システムにおいて、信号と相関のないエネルギ W の白色ノイズを仮定すると

$$E(\Delta\beta) = \sum_{n=1}^{N} \left\{ s_{\beta+\Delta\beta}(n) - s_\beta(n) \right\}^2$$

が W/N より小さくなるような誤差 $\Delta\beta$ でパラメータ β を決定することはできない。

ノイズ密度

問い:　以下の表記は何を意味するか？

$$2.0\frac{\mathrm{V}}{\sqrt{\mathrm{Hz}}}$$

例: 帯域を 100 Hz とすると、ノイズの実効値は

$$2.0\times\sqrt{100}=20\ \ [\mathrm{V}]$$

演習問題

ノイズ密度 d $[\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}]$ の白色雑音のもとで正弦波の信号を T [s] 観測した。

信号実効値の計測誤差を求めよ。

答

ナイキスト周波数 B [Hz] をカットオフ周波数とするローパスフィルタを施してサンプリングし、N 点のデータを得たとする。このとき(離散信号)ノイズのエネルギは

$$W = d^2 BN$$

で与えられる。
したがって、信号の位相が既知の場合には、信号実効値の推定誤差(の標準偏差)は以下のように与えられる。

$$\sigma = \frac{\sqrt{W}}{N} \qquad \text{(問題 1-a)}$$

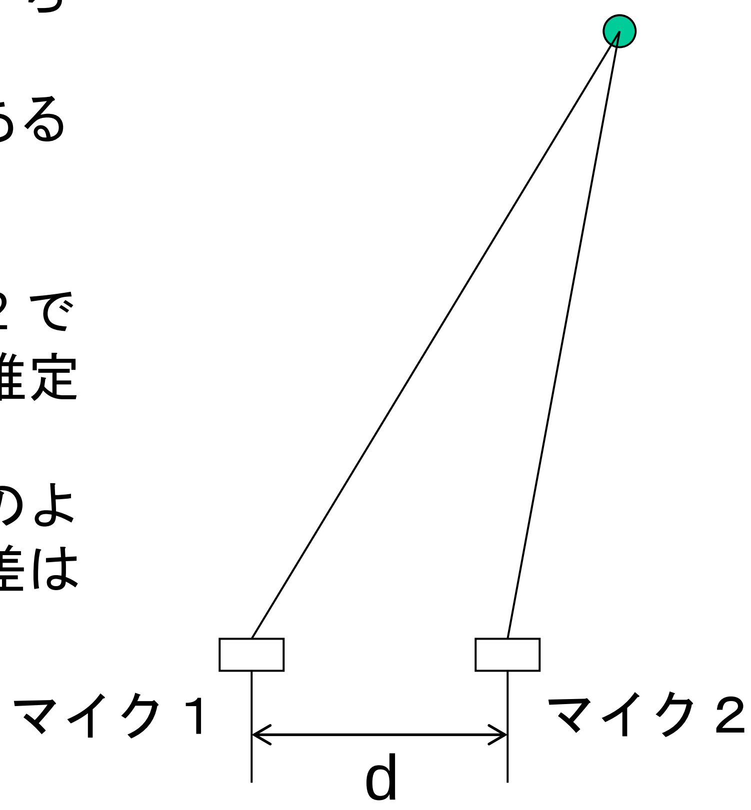
$$= d\sqrt{\frac{B}{N}} = d\sqrt{\frac{B}{2BT}} = \frac{d}{\sqrt{2T}} \quad [\mathrm{V}]$$

（信号の位相が未知の場合、上記の結果はどのような変更を受けるか？）

例題

十分遠方にある音源からの音響信号から
音源の方角を推定する。
２次元問題とし、音源は十分遠方にある
ものとする。

音源から放射された信号をマイク1, 2 で
観測し、その時間差から音源方向を推定
するものとする。
観測される信号波形とノイズを以下のよ
うに仮定するとき、不可避の推定誤差は
どのように与えられるか？



マイク1, 2 での観測信号：
　信号振幅 $1\ \mathrm{V}$, $500\ \mathrm{Hz}$ の正弦波
信号の観測時間： $0.1\ \mathrm{s}$
ノイズ： $0.01\ \mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$