物理情報デバイス論
2015. 12. 8 篠田

第4章 波動

1. 情報システムにおける波動の役割
2. 波動現象の扱い方
3. 周期構造中での波動の振舞い

波動は物理情報デバイスの主役

１. 光波面のセンシングと再生

３次元計測
ホログラフィ

２. 音環境のセンシングと再生

３. 触覚情報提示

超音波触覚ディスプレイ

４．情報伝達

センサネットワーク、ユビキタスネットワーク

１次元、２次元、３次元通信

５．情報の処理

量子情報処理、量子制御

光コンピューティング

６．計測

位置計測（光、音波、マイクロ波、ミリ波）

脳機能計測

光、音響計測全般

波動応用センサ

テラヘルツ波計測

波動に関連する問題の分類

1. 物理パラメータが数値化された後の処理、利用方法の問題

2. 幾何光学的考察で済む問題

   波動の波長が、構造の特徴的長さより十分小さい場合

3. 波動方程式に立ち返るべき問題

   波動の波長が、構造の特徴的長さと同程度の場合

4. 集中定数化が可能な問題

   構造の特徴的長さが波長より十分小さい場合

エネルギが散逸しない系における共鳴モード、共鳴周波数

関係するアプリケーション

1. 発振器（回路、時計、センサ）
2. レーザー
3. 電子的フィルタ
4. アンテナ
5. 電力伝送
6. 音響設計
7. 楽器
8. 量子コンピューティング

・
・
・

有限領域に閉じ込められた波動の固有解

有限領域での波動場を n 次元ベクトル $\mathbf{p}$ で表現すると

波動方程式 $\Longleftrightarrow$ 固有方程式 $A\mathbf{p} = \varepsilon\mathbf{p}$

共鳴周波数 $\Longleftrightarrow$ 固有値

- A の固有関数は、n 次元空間の基底を構成する
(任意の初期状態は、A の固有関数の和で表せる)

- 固有関数は「モード」ともよばれる

- 領域を無限に大きくすると、自由空間での解となる

波動によるエネルギー伝送に関する知識

フリスの伝達公式

送信電力

受信電力 $$P_r = \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 P_t G_t G_r$$ 受信アンテナの利得

群速度と位相速度

反射の法則、 エバネッセント波

主な物理現象と支配方程式

電磁気 ⇒ マックスウエルの方程式

弾性 ⇒ 弾性方程式

物質粒子 ⇒ シュレディンガー方程式

いずれも
波動方程式

温度、微粒子の拡散 ⇒ 拡散方程式

シュレディンガー
方程式

$$\frac{2m}{j\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \Delta\psi \longrightarrow$$

- 波長が長いほど
ゆっくり進む
- $\frac{d\omega}{dk} = 2\frac{\omega}{k}$

（ただし ポテンシャル $U = 0$ ）

一般の
波動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \Delta\psi \longrightarrow$$

波束が崩れない

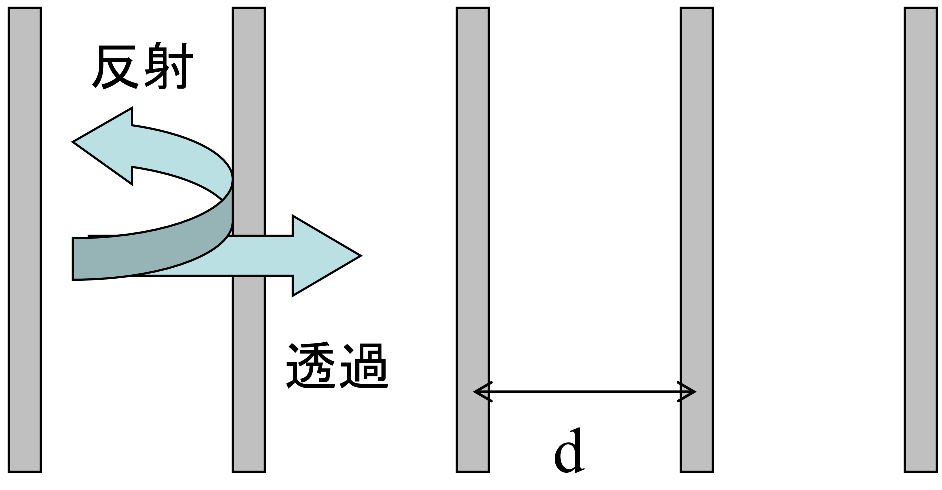
参考:
拡散方程式

$$\alpha\frac{\partial}{\partial t}\psi = \Delta\psi \longrightarrow$$

方向性のある運動
はしない。ボケる。

2. 周期構造中での波動の振る舞い

周期的 $\left\{\begin{array}{l}\text{ポテンシャル} \\ \text{反射体}\end{array}\right.$ の中の波動



Bragg 反射

→ 反射体の設置周期 d の（$2/n$倍の）波長の進行波は構造体中に存在できない

周期構造

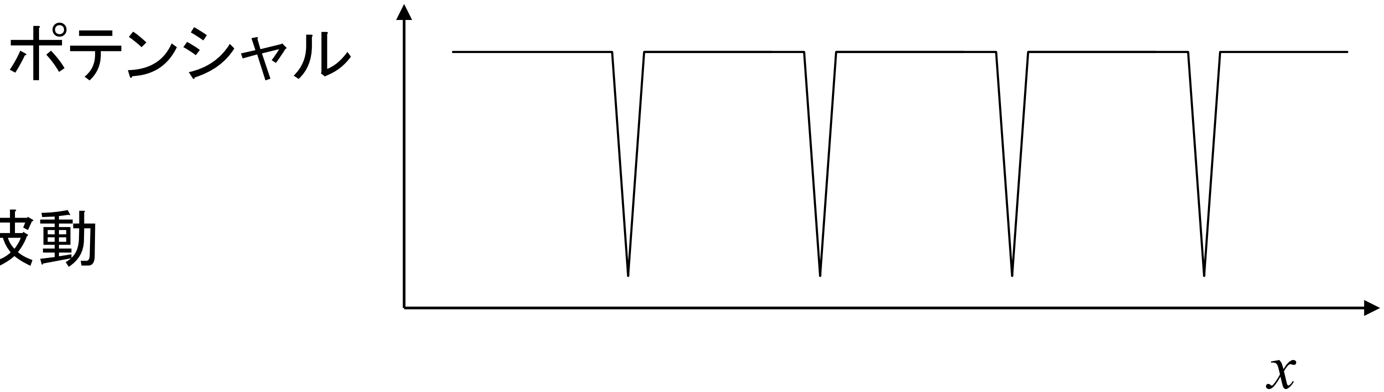
格子の周期をもつ波動は格子によって
反射され、伝搬できなくなる

電子が電界と逆向きに運動することがある

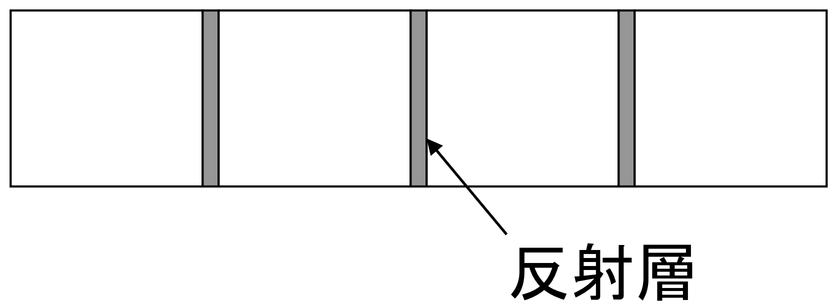
半導体中には電子とホールの両方が存在しうる

周期構造

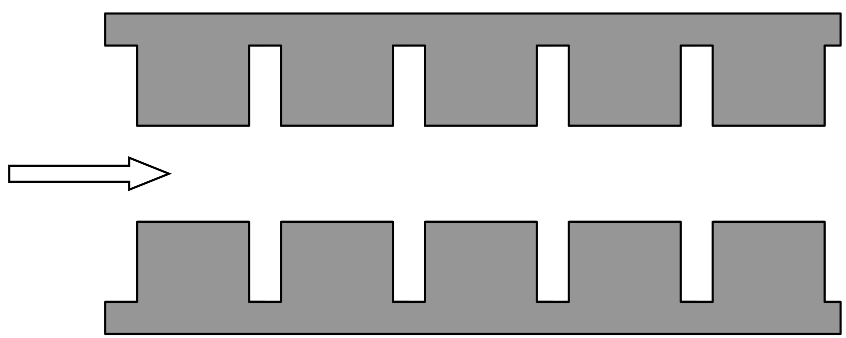
① 量子波動



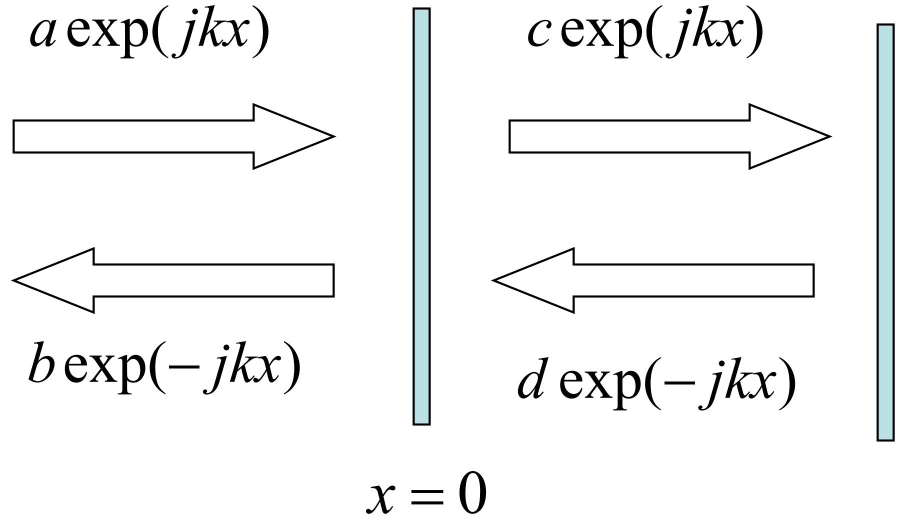
② 電磁波



③ 音波



反射境界条件



①波動関数の連続　$\psi(-\delta)=\psi(+\delta)$

$$\boxed{a+b=c+d}$$

実数*

②空間微分
（薄い反射体の場合）　$\left.\frac{\partial}{\partial x}\psi\right|_{x=+\delta}-\left.\frac{\partial}{\partial x}\psi\right|_{x=-\delta}=\beta\psi(0)$

$$\boxed{a-b=c-d-\frac{\beta}{jk}(a+b)}$$

（*境界面内でエネルギ損失がなければ β は必ず実数）

周期構造

以下の話のポイント

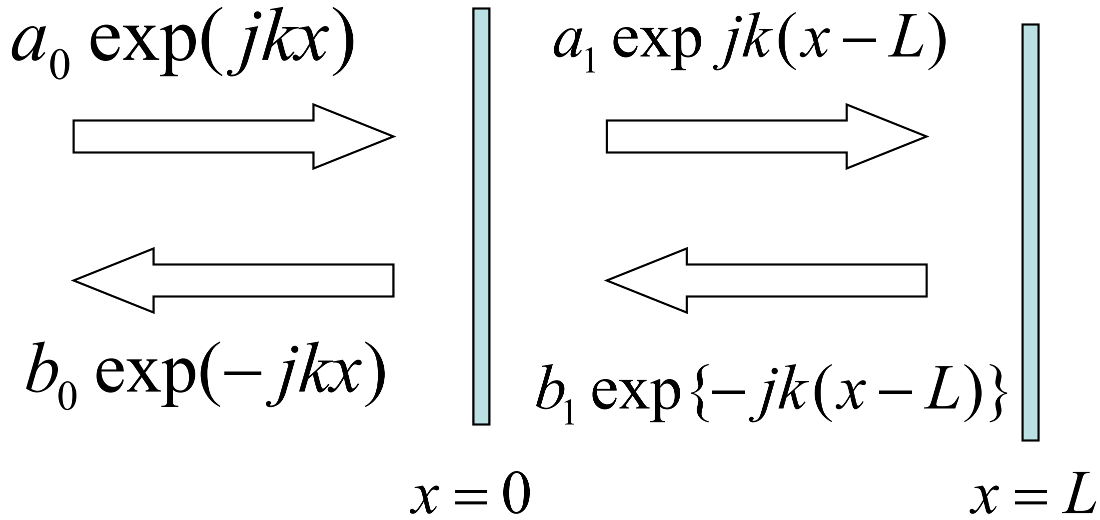
周期的反射体中を伝播する波動

〇<u>有限幅</u>の禁制帯が存在（各種波動共通）
〇電界を印加すると電子が逆向きに運動する状況がある

上記の理解の基礎

〇群速度と位相速度

周期構造内で
減衰しない解が存在
するための条件



上記のようにとったパラメータが $x=0$ においてみたすべき反射境界条件

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\beta/2jk)e^{jkL} & (\beta/2jk)e^{jkL} \\ (-\beta/2jk)e^{-jkL} & (1-\beta/2jk)e^{-jkL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}
$$

$$
\equiv A \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}
$$

周期構造内で減衰しない解が存在するための条件

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \varepsilon_1^n \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \varepsilon_2^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

＊ $(r, s), (u, v)$ は A の固有ベクトル

発散あるいは指数関数的減衰をしない解が存在する条件:

ε_1、ε_2 のうち少なくとも一つは絶対値が 1 に等しい

⇒ Bloch の定理

絶対値が1の複素数　　　　単位行列

$$\det(A - e^{jpL} E) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\cos kL + \frac{\beta}{2k} \sin kL = \cos pL}$$

上式をみたす実数 (k, p) を見つけることができれば、
それが減衰しない波動の解

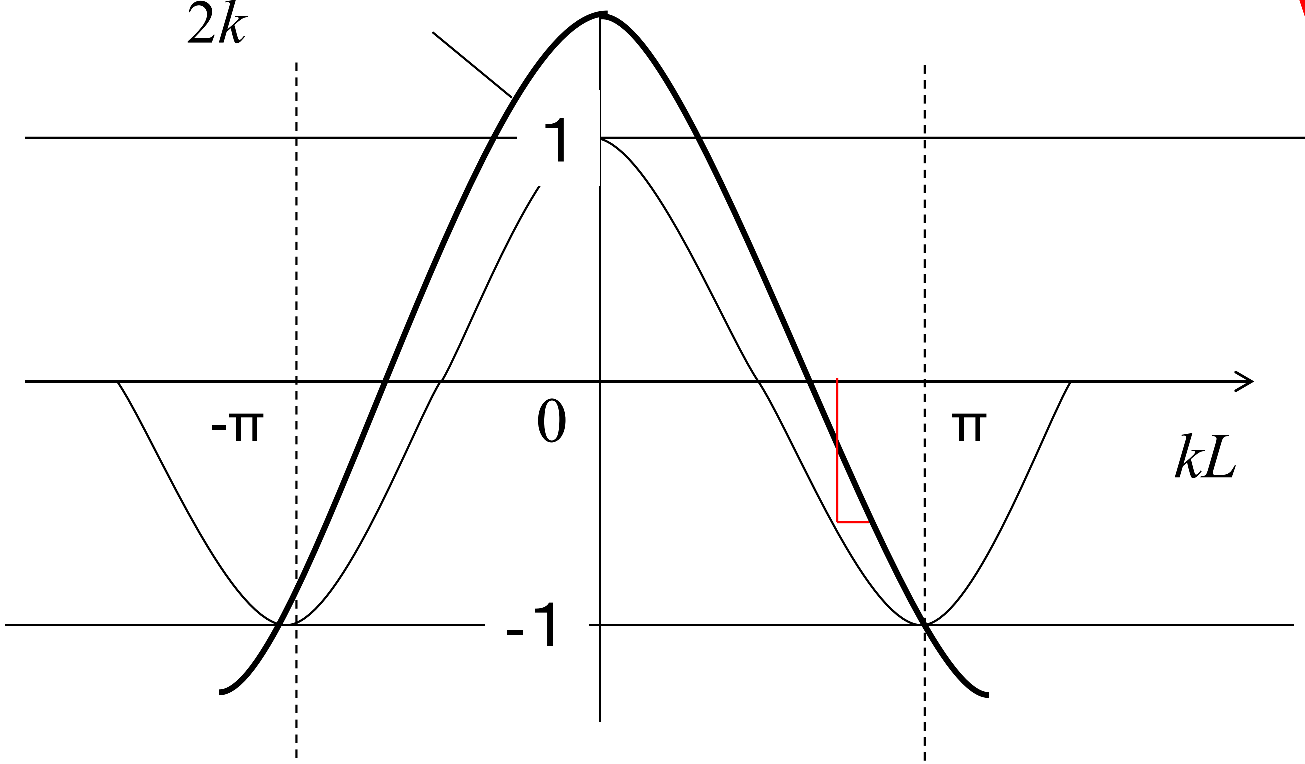
補足説明

① $$\left.\frac{\partial}{\partial x}\psi\right|_{x=+\delta} - \left.\frac{\partial}{\partial x}\psi\right|_{x=-\delta} = \beta\psi(0)$$

上式のβ（実数）

② 反射体が１層だけ存在するときの反射率 $R \equiv \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2 - \dfrac{\beta}{jk}} \dfrac{\beta}{jk}$

k と p の関係　$$\cos kL + \frac{\beta}{2k}\sin kL = \cos pL \qquad (1)$$



$\beta > 0$ の場合の図　＊β ＜ 0 の場合どうか？

$\cos kL + \frac{\beta}{2k}\sin kL \le 1$　であれば (1) を満たす p が存在する

これまでのまとめ

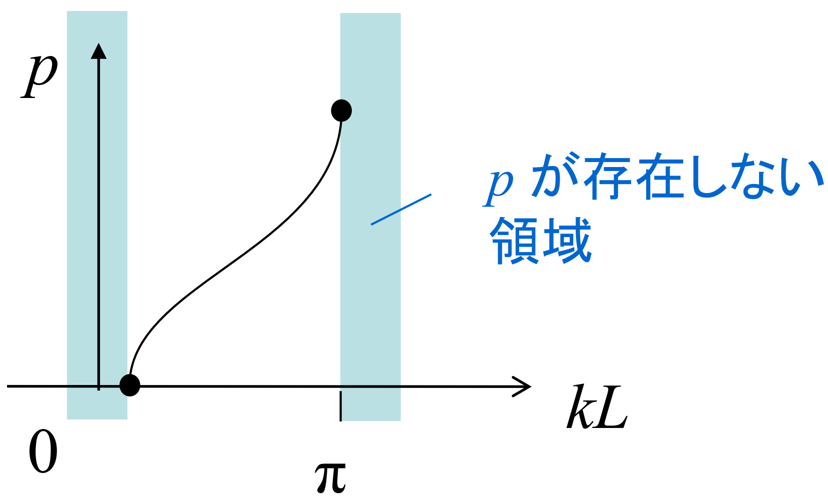
１．周期 L で配置された反射体を仮定した

２．その中を減衰なく進行する波動が存在する条件

$$\cos kL + \frac{\beta}{2k}\sin kL = \cos pL$$ をみたす p が存在

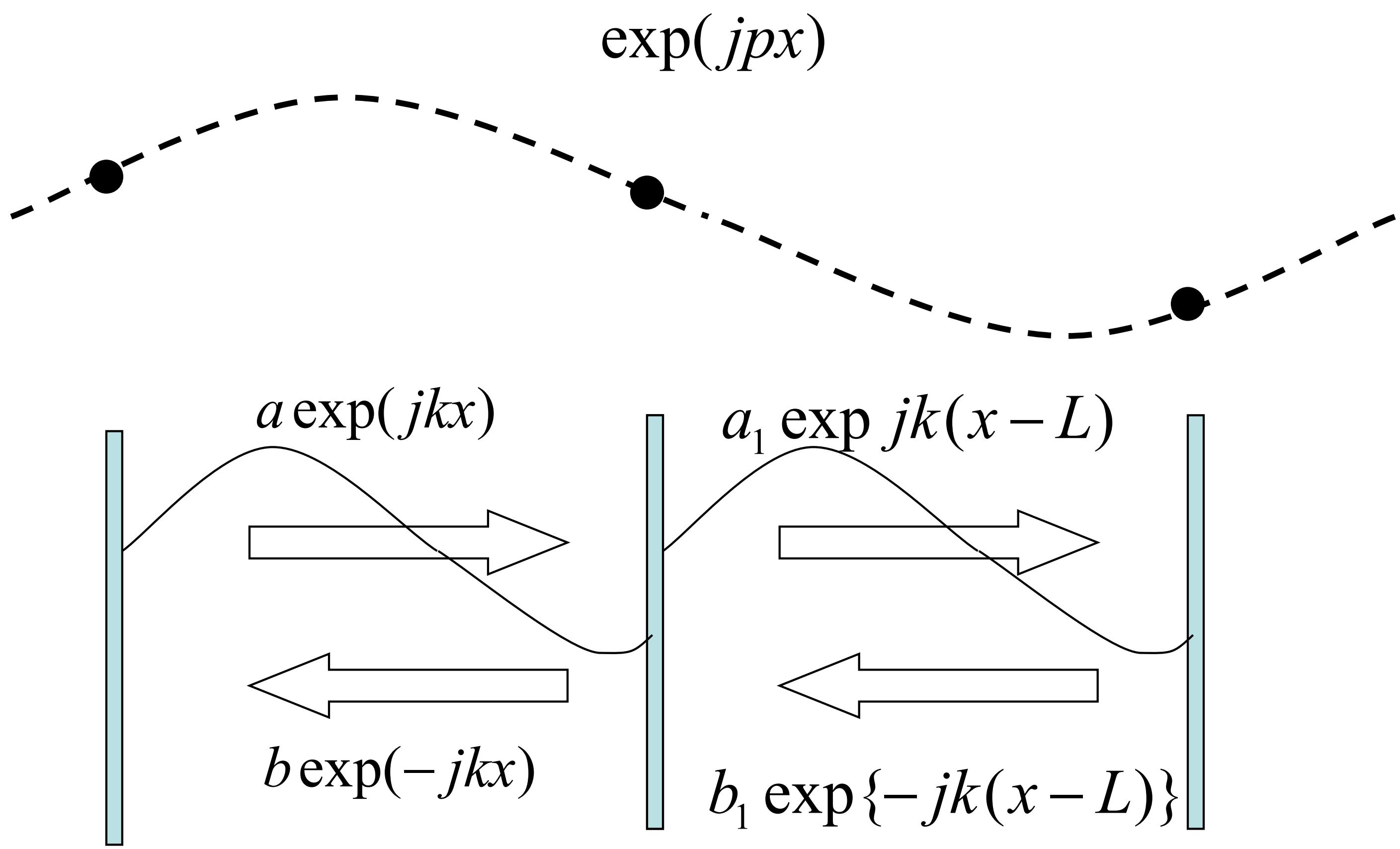
・反射体表面の位相は exp(*jpx*) のように変化する

３．進行波が存在できない k の領域が
周期的に現れる。



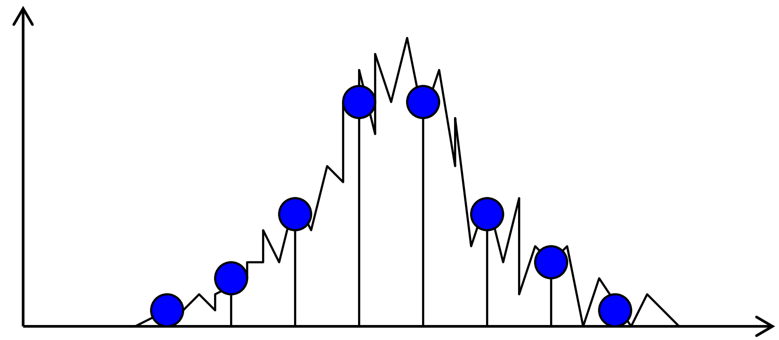
周期構造

格子中の波動を遠目で眺めると、、、、



周期構造

p と k の関係



① 波束の運動

＊(a_n, b_n) の値とそれらの間の地点の波動の絶対値は同程度

・$\exp(jpx_n)$ を重ね合わせて波束をつくることを考える

・p が周期構造内波動の位相変化をきめる

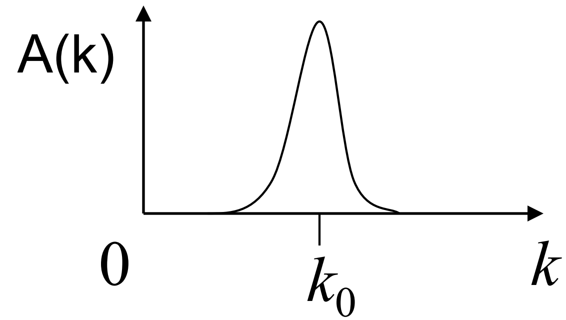
(反射層付近の値のみを見るのであれば)

$$\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} = \exp(jpx_n) \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$$

＊ただし x_n はn 番目の反射体の座標

・波束は速度 $v_{\mathrm{g}} = \dfrac{d\omega}{dp}$ で運動

証明



波束の帯域が狭く(中心周波数 k_0)、近似的に

$$f(x,t)=\int A(k)\underbrace{\exp[jkx-j\{\omega_0+\alpha(k-k_0)\}t]}_{①}dk$$

と書かれるとすると、

$$① = \exp\{jk(x-\alpha t)\}\exp\{-j\underline{(\omega_0-\alpha k_0)t}\}$$

k によらない定数で、
積分の外に出せる

より、かたまりは速度 α で進行する。

注意: 正弦波動の進行の速度と波束の進行速度は
一致するとは限らない。

周期構造中の波束の進行速度

波束の進行速度　＝

① 物質波の場合

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2 \qquad \text{より} \qquad \frac{d\omega}{dp} = \frac{\hbar}{m} k \frac{dk}{dp}$$

② 電磁波、音波の場合

$$\omega = ck \qquad \text{より} \qquad \frac{d\omega}{dp} = c \frac{dk}{dp}$$

＊いずれの場合も $\dfrac{dk}{dp}$ に比例

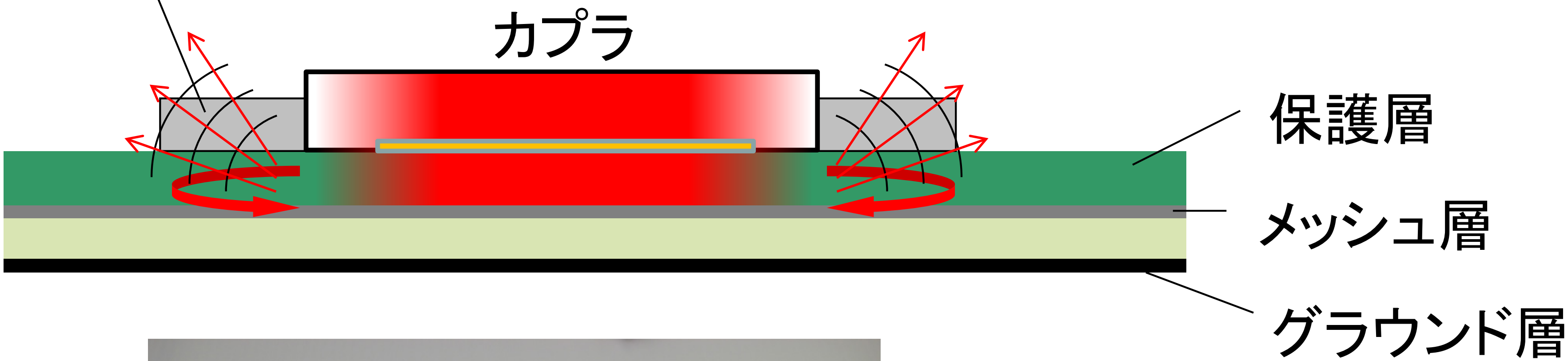
問

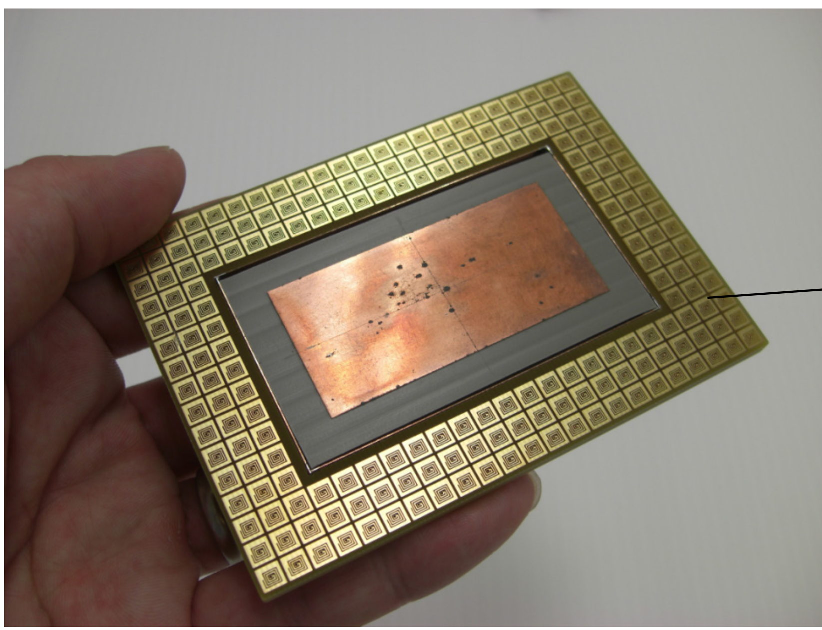
周期反射体の活用例をあげてみて下さい

以下付録

２次元通信カプラにおける電磁界漏えい対策

EBG 構造（NEC 小林、塚越　2010）

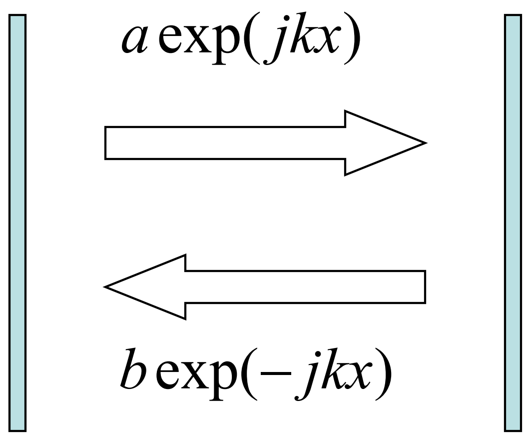




EBG 構造

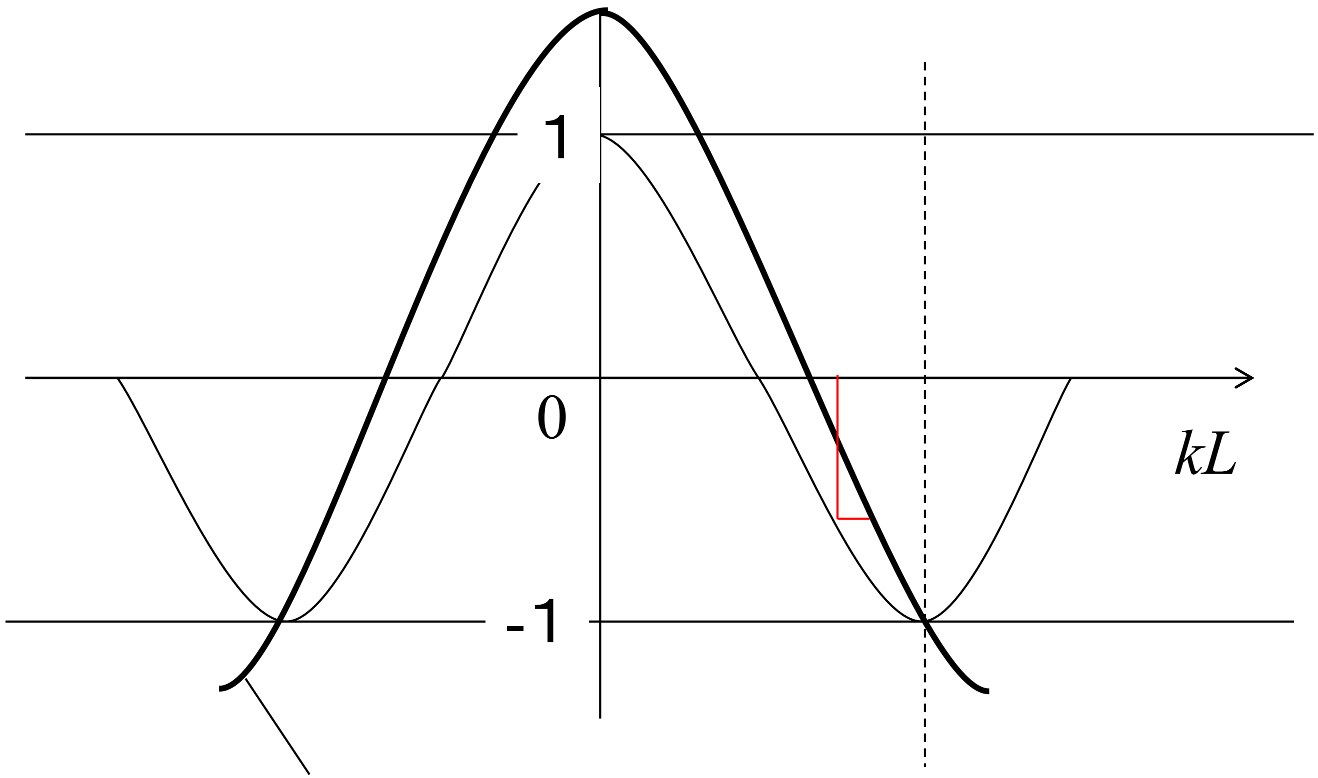
② 周期格子中の波束の進行速度 $\dfrac{d\omega}{dp}$ と k の関係は？

$$\boxed{\frac{dk}{dp} \approx \frac{|a|^2 - |b|^2}{|\phi|^2 \text{の空間平均値}}}$$



$$\phi(x) = a\exp(jkx) + b\exp(-jkx)$$

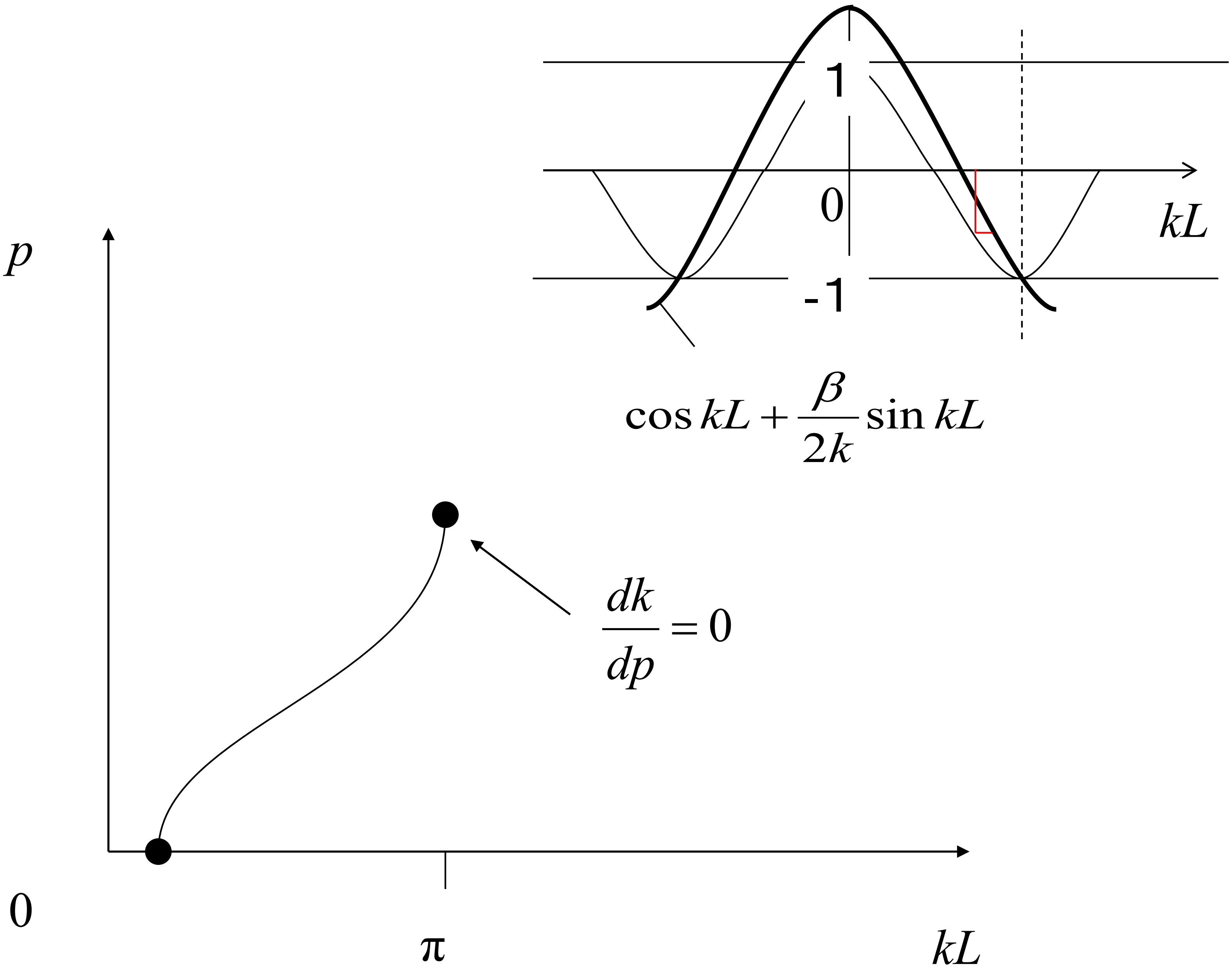
k と p の関係 $\cos kL + \dfrac{\beta}{2k} \sin kL = \cos pL$



$\cos kL + \dfrac{\beta}{2k} \sin kL$

・k は自由空間での波数

＊上図は $\beta > 0$ の場合


1
0
-1
kL
$\cos kL + \frac{\beta}{2k}\sin kL$
p
$\frac{dk}{dp} = 0$
0
π
kL

これまでのまとめ　２

１．周期 L で配置された反射体を仮定した

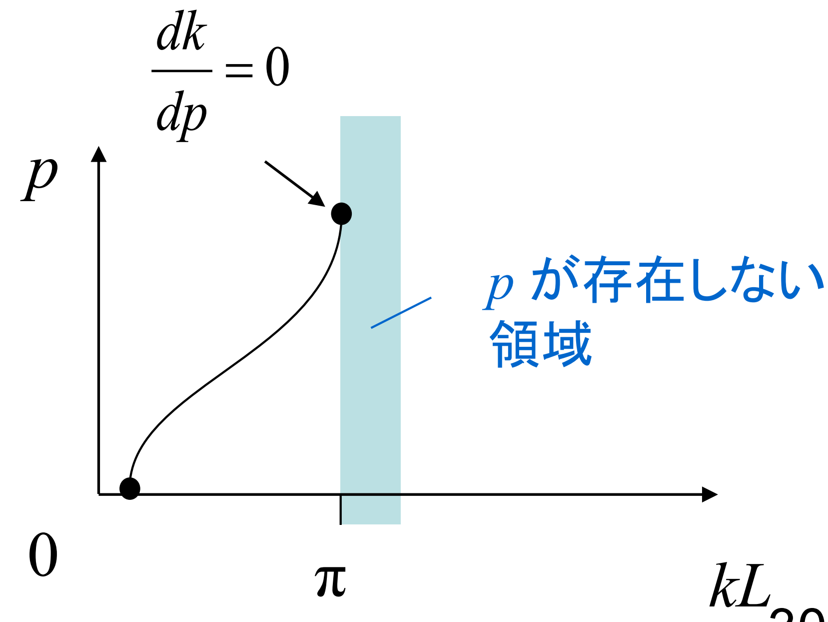
２．その中を減衰なく進行する波動が存在する条件

$$\cos kL + \frac{\beta}{2k}\sin kL = \cos pL$$　をみたす p が存在

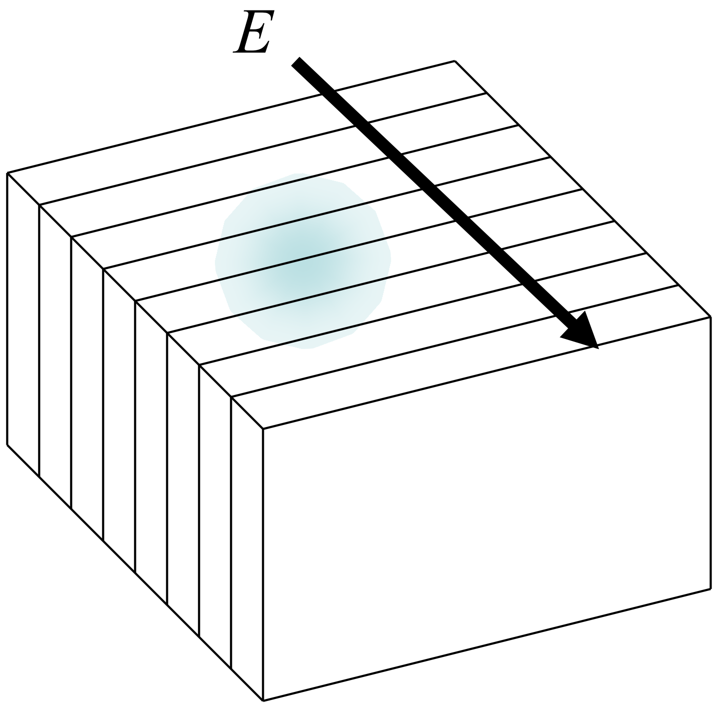
・exp(jpx) で位相が変化
・周期をまたぐ波束の移動速度

$$v_{\mathrm{g}} = d\omega/dp$$

３．進行波が存在できない k の領域がある。



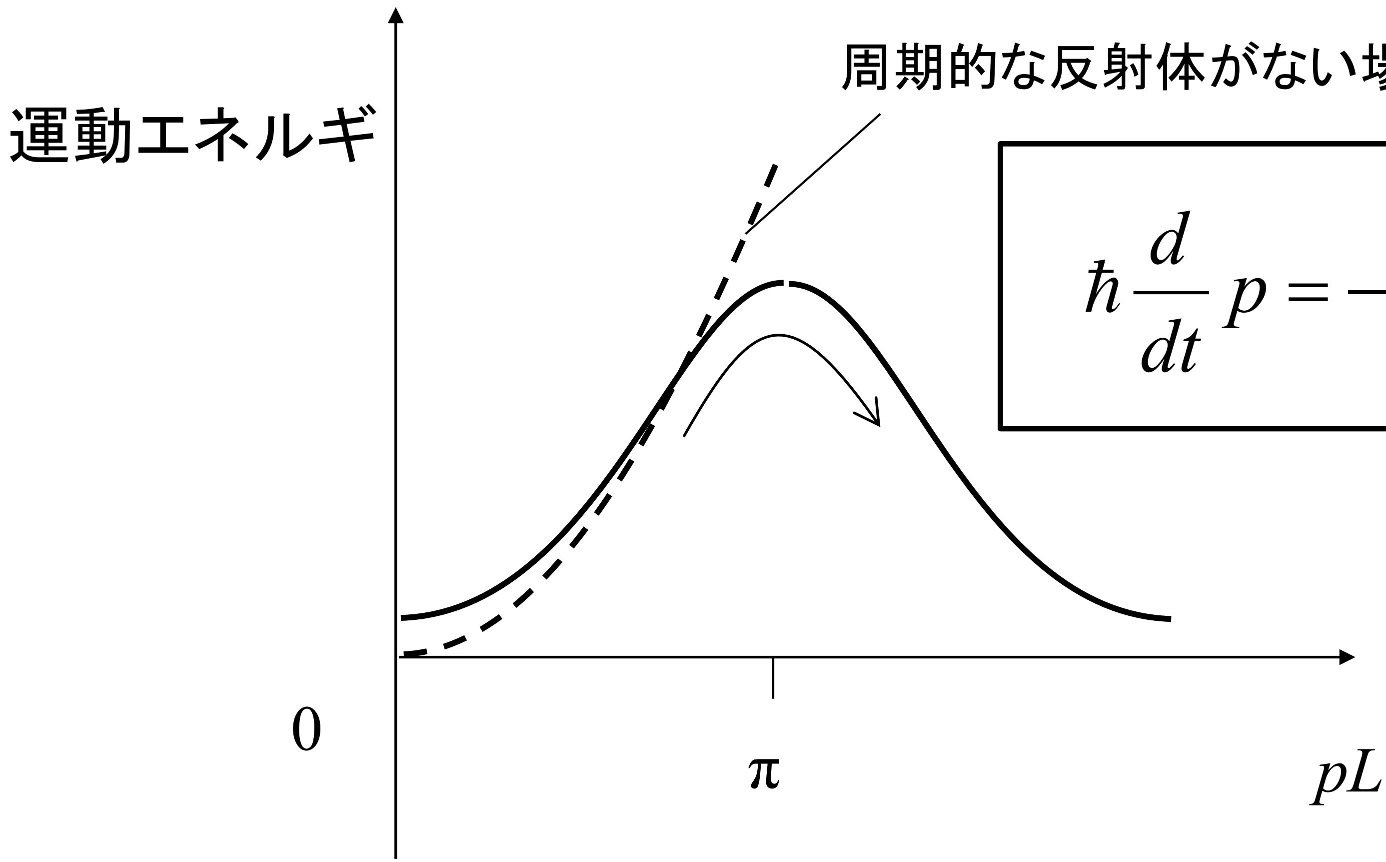
周期構造中の波束の運動



格子中の電子の波束に
電界をかけると・・・

静止していた波束は、最初力の方向に加速するが
やがて減速して再び静止し、逆向きに運動を始める

p の中心値の時間変化 (物質粒子）



$$\hbar \frac{d}{dt} p = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

[証明]

$$\frac{dE}{dt} = \hbar \frac{d\omega}{dt} = \hbar \frac{\partial \omega}{\partial p} \frac{dp}{dt} = \hbar \frac{dp}{dt} v_{\mathrm{g}}$$ および $$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} v_{\mathrm{g}}$$ より

周期構造中の波束の運動

波束がポテンシャル勾配の逆向きに加速しても
エネルギー保存に反しない理由

物質波の場合

運動エネルギー $\propto$ 時間周波数 $\propto k^2$

外部電界のポテンシャル減少

⇒ $|k|$ の増大

波束の運動