

システム情報工学演習第二 2020. 12. 22

多次元計測(2) 計測の直交性

篠田 裕之

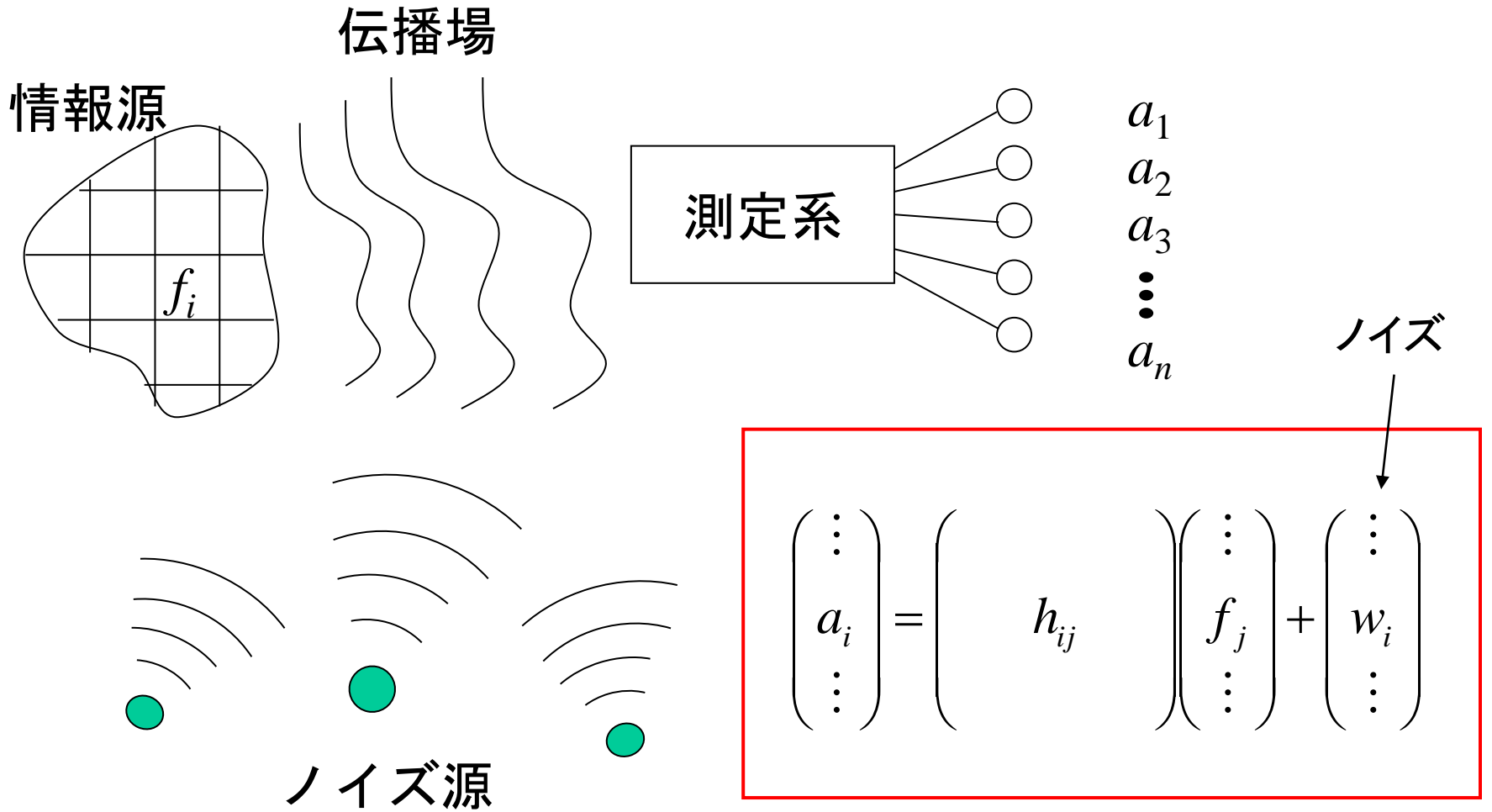
<https://hapislab.org/>

[hiroyuki\\_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp](mailto:hiroyuki_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp)

## 進め方

演習問題1～5を解答し、1/4 までに提出して下さい。

# 線形系におけるパターン計測



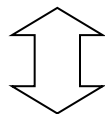
測定値  $a$  から  $f$  を求める

## 今回の結論

被測定量:  $\mathbf{x}$ , ノイズ:  $\mathbf{w}$ ,  
計測システムの出カ:  $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{w}$

\* ノイズ  $\mathbf{w}$  の各成分はランダムで分散が等しい.

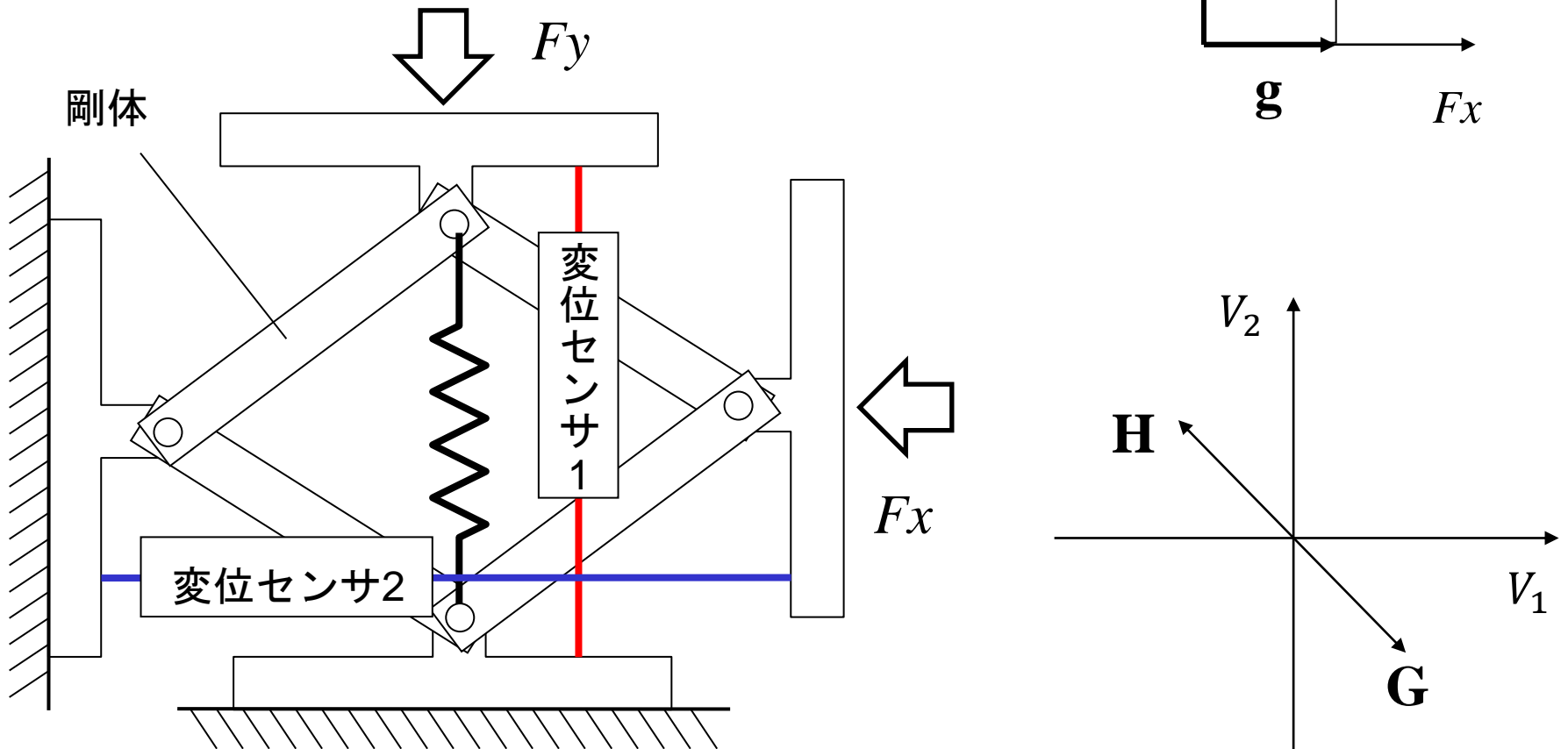
このような計測系において  
行列  $A$  の最大特異値と最小特異値の比が1に近い



$\mathbf{x}$  の各自由度を均等な精度で測定可能

観測したい  $\mathbf{x}$  の基底に対するセンサ群の出カベクトル  $\mathbf{y}$  が直交するシステムはよい観測系である。

# ナンセンスな2次元センサ



変位センサ1, 2の出力 ( $V_1, V_2$ ) から ( $F_x, F_y$ ) を推定することはできない

$G = -H$  の場合  $(F_x, F_y)$  は特定できない

- ただし識別可能な状態数がゼロになるわけではない
- 計測可能な成分と計測できない成分が存在する

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x + F_y \\ F_x - F_y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$\alpha$ は測定不能

$\beta$ は測定可能

# 信号の直交性

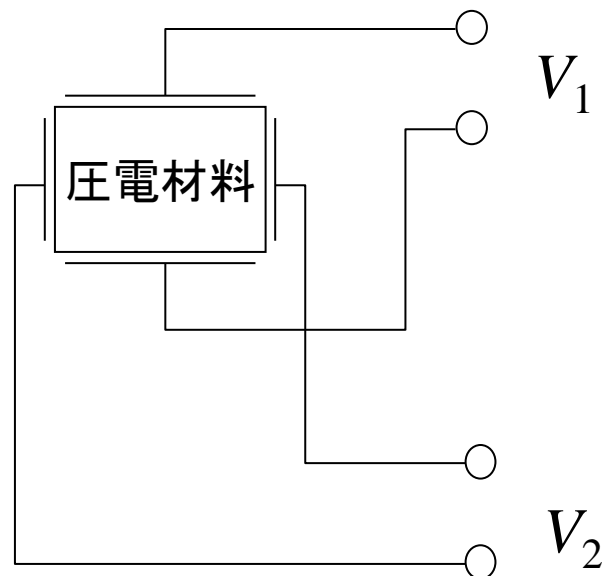
## 例1) 応力センサ

測定したい量

--- 印加力 ( $F_x, F_y$ )

計測システムの出カ

--- 電圧 ( $V_1, V_2$ )



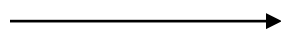
真値    ノイズ  
↓        ↓

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

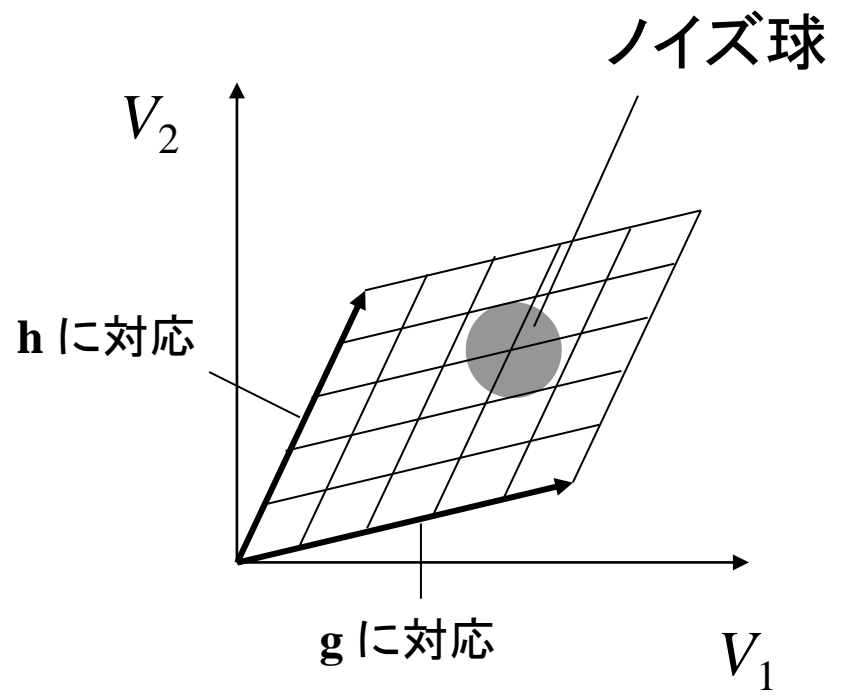
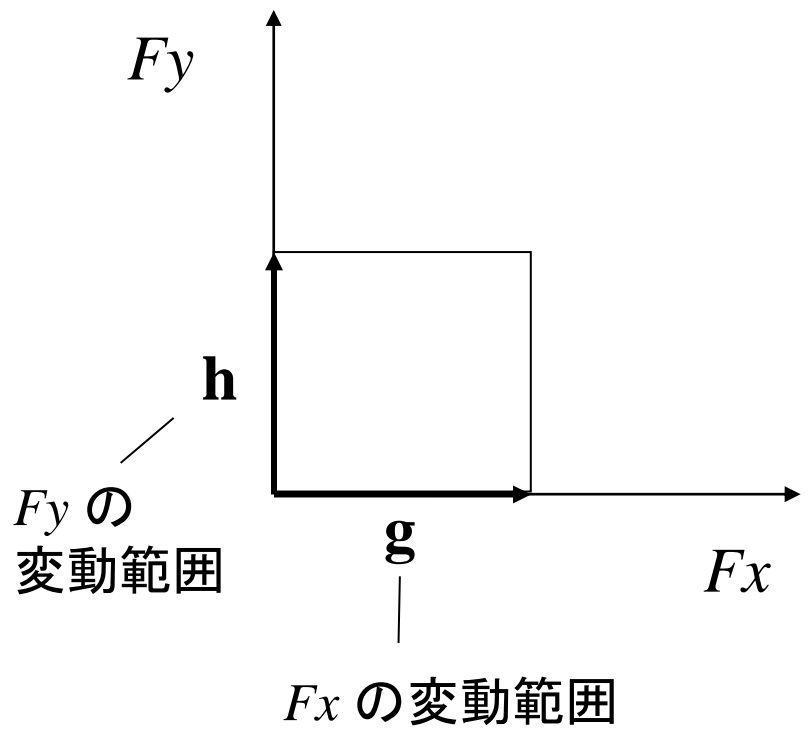


$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

$(F_x, F_y)$  の計測誤差には方向性がある

最終的に知りたい量  
 $(F_x, F_y)$

直接的に観測される量  
 $(V_1, V_2)$





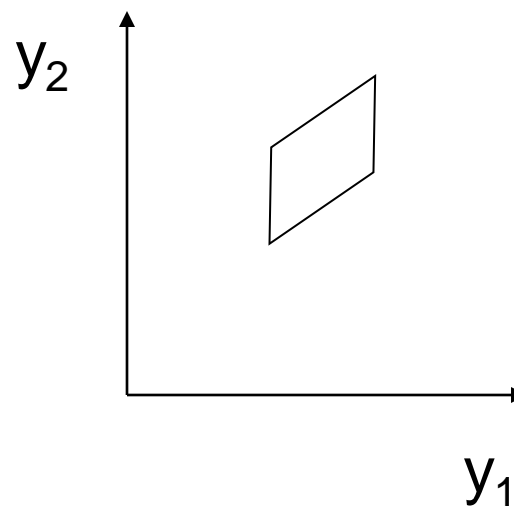
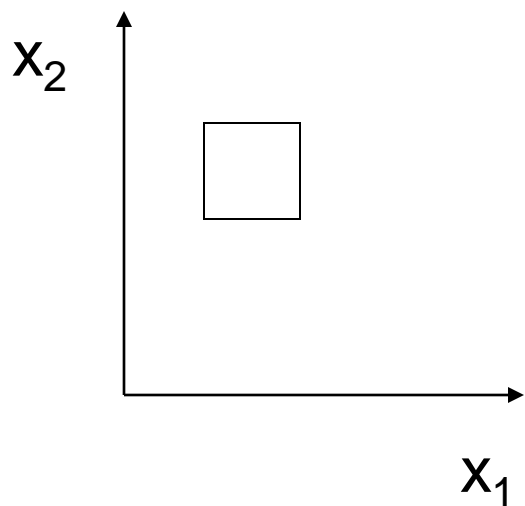
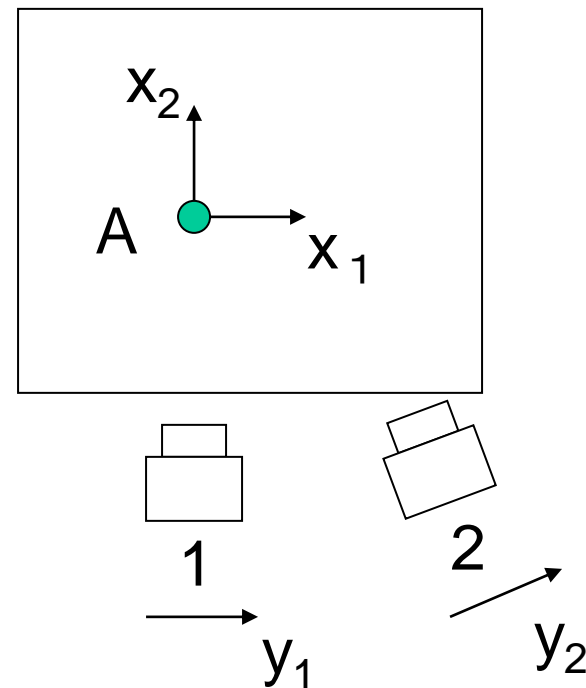
## 信号の直交性 例2

### 例2) 画像計測

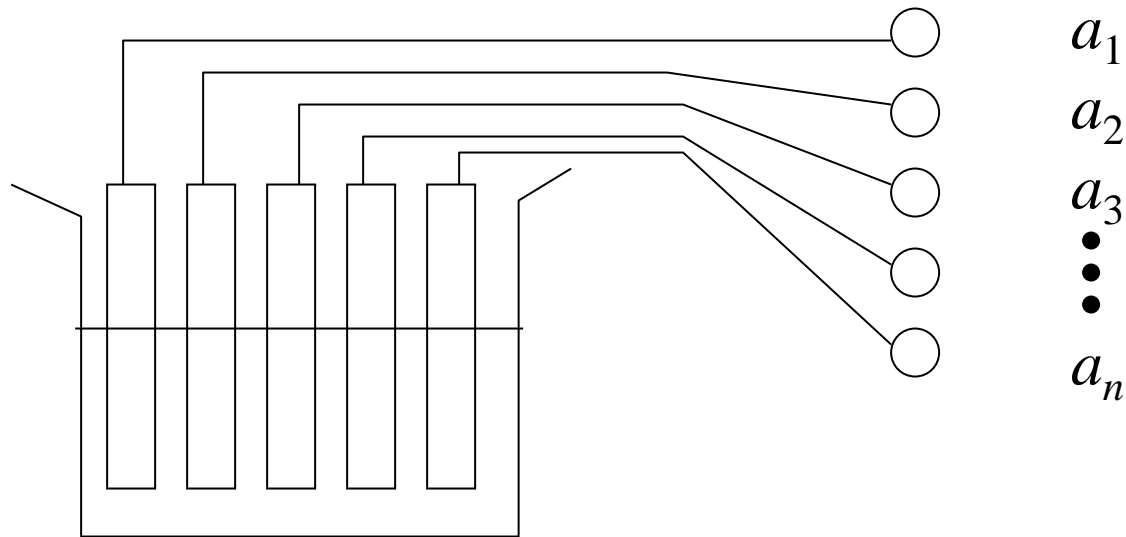
観測物体の変位の観測精度とカメラ位置  
の関係は？

$(x_1, x_2)$ : 対象(点)の位置

$y_i$ : カメラ  $i$  の画像中の位置



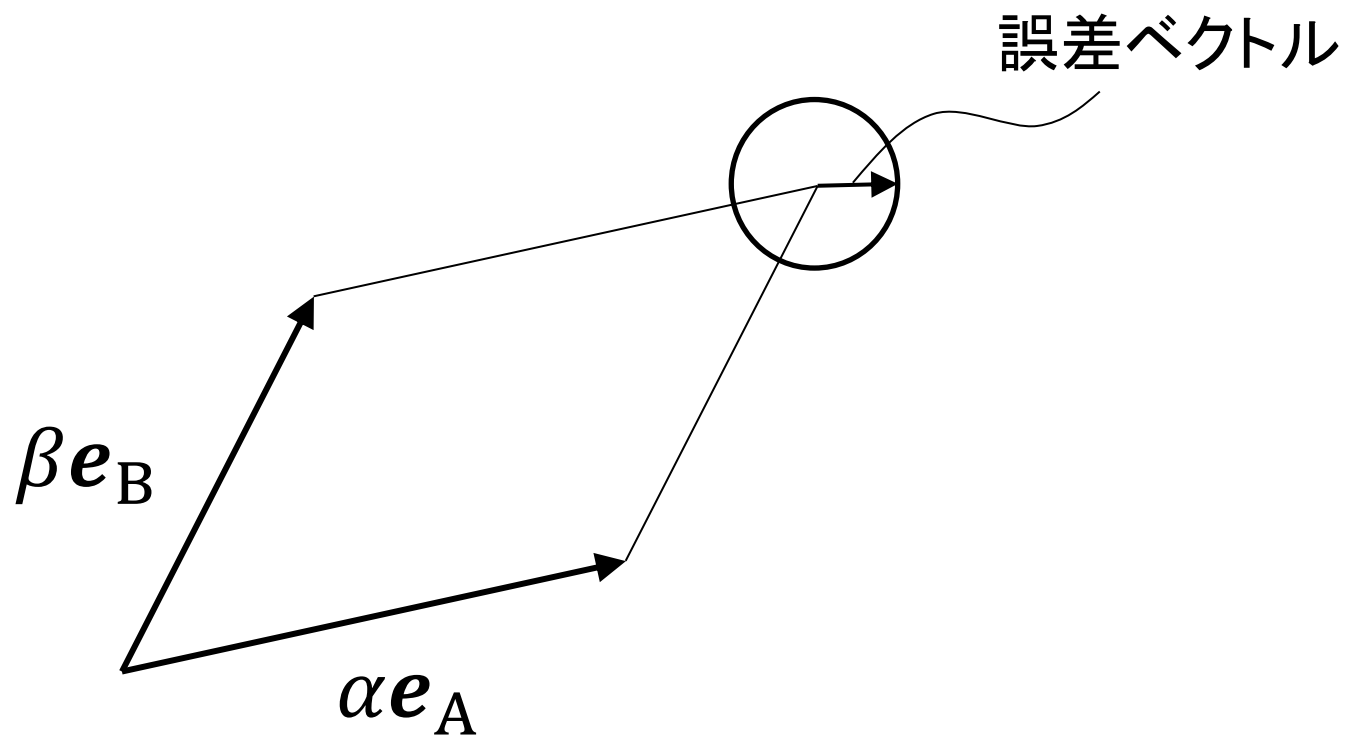
### 例3) 化学成分センサ



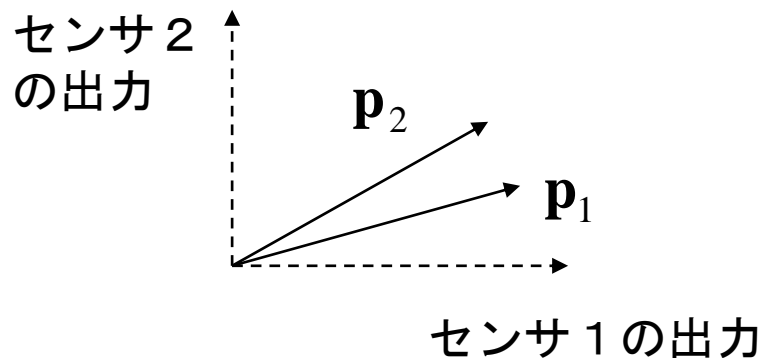
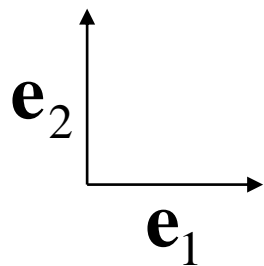
成分 A の濃度  $\alpha$  に対するセンサ出力  $\longrightarrow \alpha \mathbf{e}_A, \mathbf{e}_A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

成分 B の濃度  $\beta$  に対するセンサ出力  $\longrightarrow \beta \mathbf{e}_B, \mathbf{e}_B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

溶液 A, B の濃度 ( $\alpha, \beta$ ) を同時測定したい



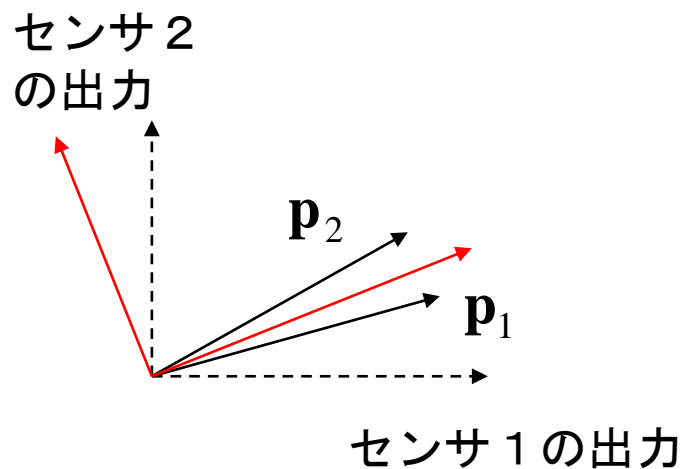
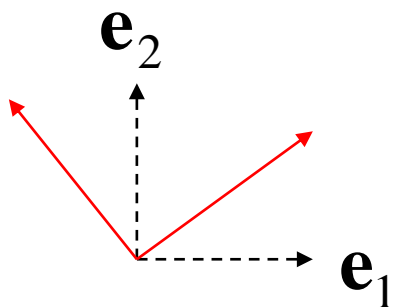
# 観測しやすい量としにくい量



観測したい物理量  $x$  の空間

センサ出力パターン  $y$  の空間

計測システムの能力は一般にどのように記述されるか



# 計測の可能性を特異値分解を通して理解する

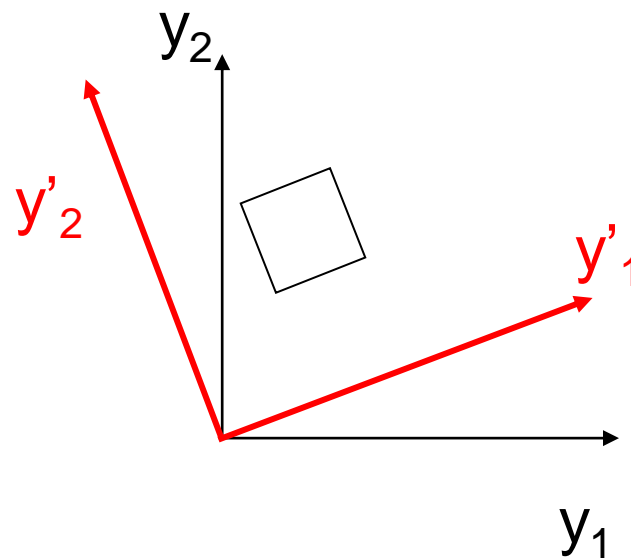
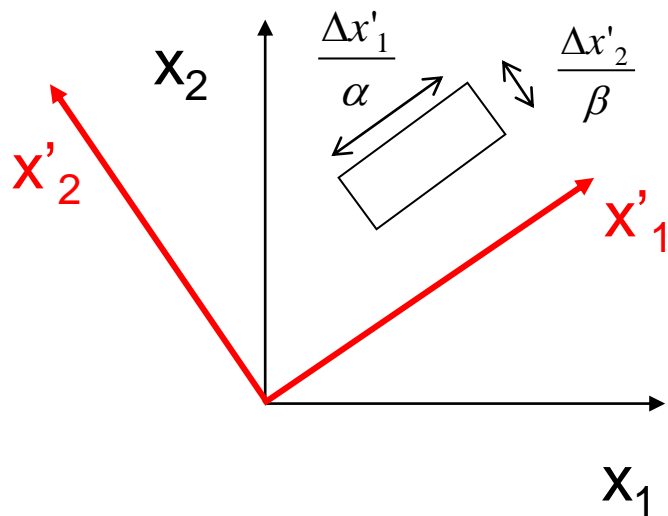
$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

➔

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta$ :  ${}^tAA$  の固有値の平方根



## 演習問題1

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とし}$$

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{e} \text{ とする。}$$

測定誤差  $e_1, e_2$  の分散は等しく  $e^2$  であるとき、 $(x_1, x_2)$  の推定において最も計測精度が高くなる方向と低くなる方向を求めよ。

# 答

$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  は正の固有値をもち、それらを  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) とする。

$$(\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2})$$

また、対応する(正規化した)固有ベクトルを  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  とする。 $R = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$  は直交行列であり、

$$R^T A^T A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

を満たし、 $R^T A^T = (AR)^T$  の各行のノルムが  $\sqrt{\lambda_1}$  であることに注意すると

$$Q^T AR = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} R^T$$

となる直交行列  $Q$  が存在する。ただし、 $Q^T$  は各行のノルムが  $(AR)^T$  の各行の  $1/\sqrt{\lambda_1}$  倍に等しい行列である。(上記が「特異値分解」である) すなわち

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \Leftrightarrow Q^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} R^T \mathbf{x}$$

これより、最も精度が高くなる  $x$  の方向は、 $R^T$  の第1行に平行な方向すなわち  $\mathbf{a}_1 \parallel (\sqrt{2} - 1, 1)^T$  に沿った方向である。

## 演習問題 2

ある光点の3次元位置を2つのカメラ1, 2を用いて計測する. 位置 $P(x, y, z)$ にある光点はカメラ1の座標では

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

の位置に観測され, カメラ2の座標では

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

の位置に観測される.  $P$  は  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < L$  なる球領域に存在し, 常にカメラの視野内にある.

本計測システムで $P$ の移動距離を計測する.  $a, b, c, d$  の測定誤差の分散は等しく  $e^2$  とみなせ, 互いに相関はないものとする. 測定精度が最も高くなる移動方向と, 最も低くなる移動方向を答えよ.



# 答

$$A \equiv \frac{1}{L} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の特異値と、対応する回転行列を求めよう。

前問と同様に考え、

$$B = A^T A = \frac{1}{L^2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{L^2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$L^2 B$  の固有方程式

$$(3-x)^2(6-x) - (6-x) = (6-x)(3-x+1)(3-x-1) = (6-x)(4-x)(2-x) = 0$$

より特異値は

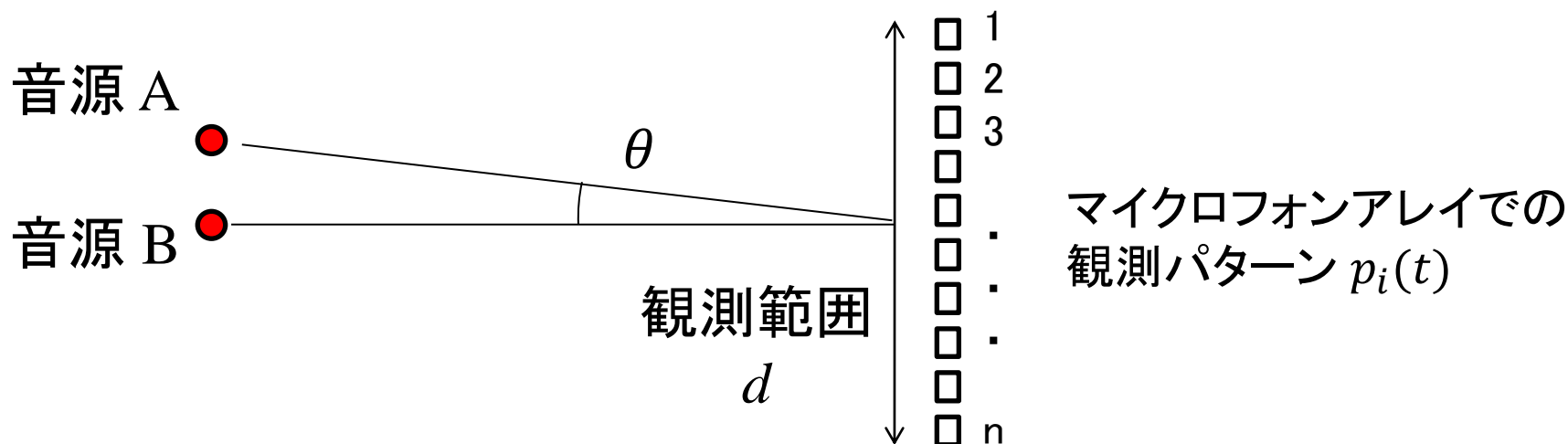
$$\sqrt{6}/L, 2/L, \sqrt{2}/L$$

最も感度が高くなるのは  $\epsilon_1 = \sqrt{6}/L$  に対応する方向、すなわち  $B$  の固有値  $6/L^2$  に対応する固有

ベクトル  $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  に平行な方向

感度が低くなるのは  $\epsilon_2 = \sqrt{2}/L$  に対応する方向で、 $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  に平行な方向

## 開口と計測の直交性の関係



互いに近くに存在する同一周波数音源AとBを見分けたい。

音の平均強度のみ計測する場合と瞬時音圧  $p_i(t)$  を計測する場合

について比較してみよう

### 演習問題3

前スライドの設定において、フェーズドアレイから音源までの距離  $L$ 、観測範囲  $d$ 、音の波長  $\lambda$  は  $L \gg d \gg \lambda$  を満たすものとする。

1. 定常音源 A、B に対する平均強度を  $\overline{p_i^A}$ 、 $\overline{p_i^B}$ 、 $t = t_0$  での瞬時音圧を  $p_i^A(t_0)$ 、 $p_i^B(t_0)$  とする。  
 $\overline{p_i^A}$ 、 $\overline{p_i^B}$  の間の直交性と  $p_i^A(t_0)$ 、 $p_i^B(t_0)$  の間の直交性を比較せよ。
2. B はマイクアレイの真正面にあり、A は真正面から  $\theta$  の確度にある。 $p_i^A(t_0)$  と  $p_i^B(t_0)$  が直交する  $\theta$  の最小値を求めよ。
3. カメラや望遠鏡の解像限界が開口径で決まることを説明せよ。

## 答

1. 音源が遠方にある場合、 $\overline{p_i^A}$  と  $\overline{p_i^B}$  のパターンはほぼ平行であり、直交性は低い。  
 $d \gg \lambda$  の場合には、 $\theta$  を増大させていくと、周期的に  $p_i^A(t_0)$  と  $p_i^B(t_0)$  が直交する。
2. アレイに到来する音波を平面波とすると、
$$\sin(d\theta) \simeq d\theta = \lambda$$
したがって最小値は  $\theta = \lambda/d$  。
3. 音波が電磁波に置き換わっても事情は同様。

## 演習問題4

音源Aから出る 300 Hz の正弦波信号  $p_A(t)$  と、音源Bから出る 120 Hz の正弦波信号  $p_B(t)$  が同時に1つのマイクに入り、 $p = p_A + p_B$  が観測されている。 $p_A$ 、 $p_B$  の振幅を、 $p$  から同時推定する際の推定誤差を求めよ。

ただし観測時間は  $T = 1$  s である。A、Bそれぞれが単独で存在するときの信号振幅推定誤差は、音源とは関係のない環境音に由来しそれぞれ  $w_A$  および  $w_B$  であるとする。

答

音源Aの信号と音源Bの信号が直交している限り、信号振幅推定誤差はそれぞれ  $w_A$  および  $w_B$  のままである。

\*たとえば2つの音が同時に入ることによって飽和するなどの現象が起きている場合はこの限りではない。

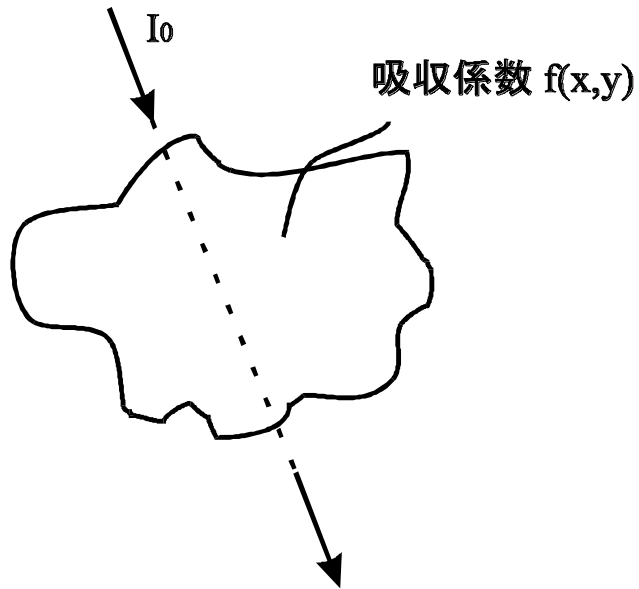
参考 X線CT (Computed Tomography)

## X線の発見



Wilhelm Röntgen 1895

## X線の透過特性



$$I = I_0 \exp\left(-\int f ds\right) \quad \text{より}$$

$$-\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \int f ds$$

吸収係数の経路和が観測できる。

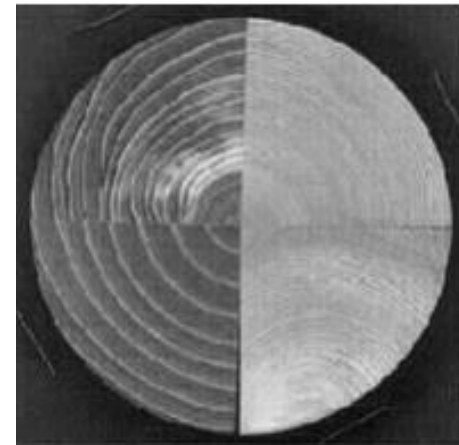




X線写真

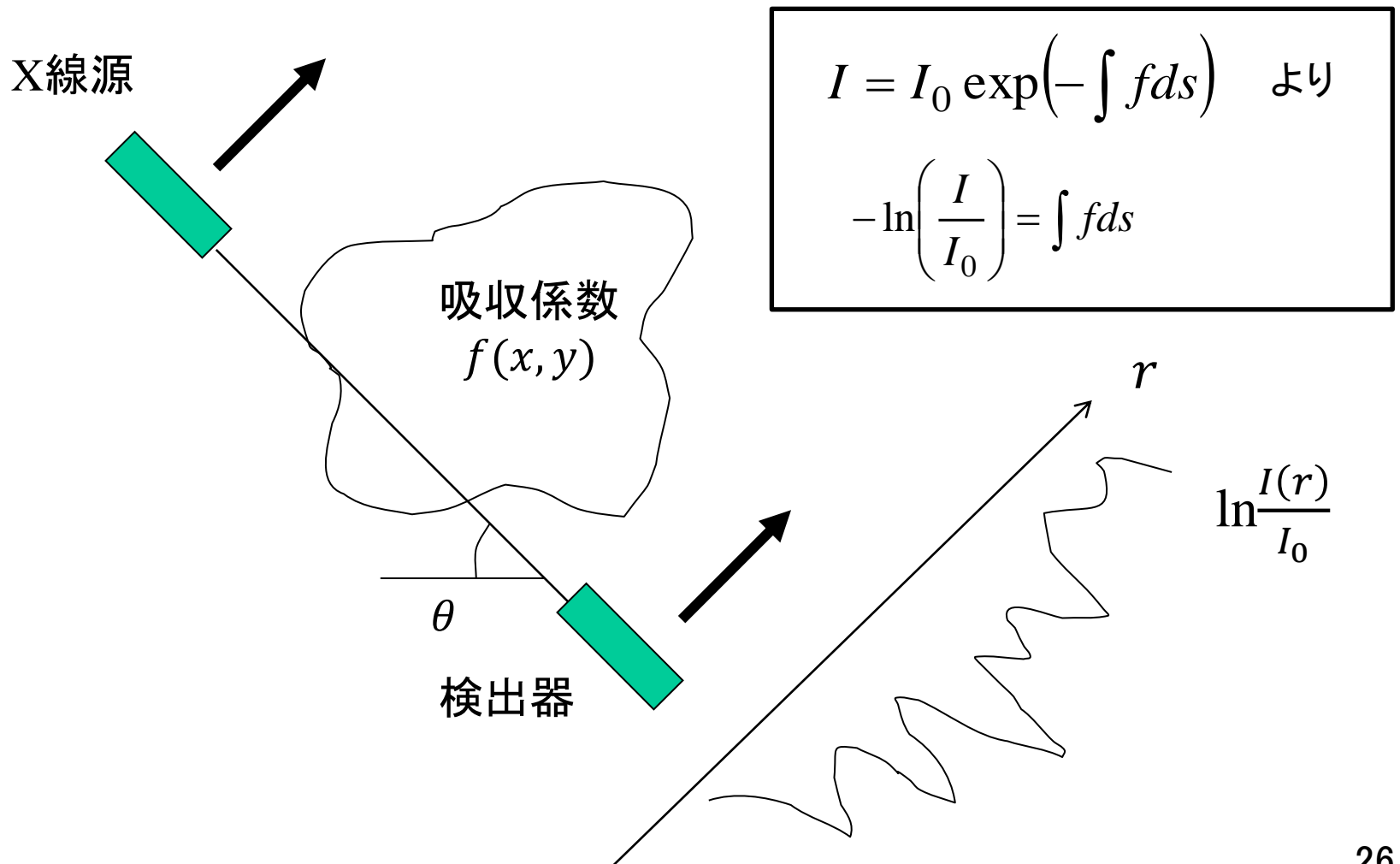


頭部断層像



木材断層像

全ての  $\theta$  に対して  $I(r)$  を検出すれば  $f(x, y)$  が求まるか？



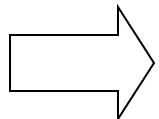
2次元フーリエ変換  $F(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{x}) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$

原像を回転 ---> 変換像も同じだけ回転

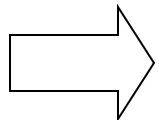
[証明]

回転:  $f'(\mathbf{x}) = f(R\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} F'(\mathbf{k}) &= \int f(R\mathbf{x}) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int f(R\mathbf{x}) \exp(j(R\mathbf{k}) \cdot (R\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \int f(\mathbf{x}) \exp(j(R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = F(R\mathbf{k}) \end{aligned}$$



$I(r)$  のフーリエ変換は  $F(k)$  の断面 (中央断面定理)



全方向の  $I(r)$  で二次元平面を埋め、2次元逆フーリエ変換すればよい

(重要な理解)

## 演習問題 5

体内でのX線吸収係数分布  $f(x, y)$  を各点でサンプルし、通し番号をつけたものを  $f_j$ 、計測器で得られた計測値  $p(\theta, r) = \ln \frac{I_\theta(r)}{I_0}$  に通し番号をつけたものを  $p_i$  とする。

コンピュータを使って、原理的に  $p_i$  から  $f_j$  が再現できるかを判断するには何を確認すればよいか？

# 答

1. 観測したい  $xy$  平面を細かい領域に分割し、順問題として下記の行列  $A$  を求める。 $(a_{ij}$  の値は物理モデルから自動計算できる)

$$\begin{matrix} & \mathbf{p} & & \mathbf{A} & & \mathbf{f} \\ \left( \begin{matrix} p_i \end{matrix} \right) & = & \left( \begin{matrix} \ddots & & \\ & a_{ij} & \\ & & \ddots \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} f_j \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

2. 観測点を増やしていき、 $A$  の特異値を観察する。有意な値をもつ特異値の個数と  $f$  の次元の比較から計測可能性が判断できる。

● 特異値分解

$$A = \begin{pmatrix} m \times n \end{pmatrix}$$

$$R_2 A R_1^{-1} = \begin{pmatrix} m \times m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \times n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \times n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

---

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad \longrightarrow \quad R_2\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} R_1\mathbf{x}$$

## 特異値分解の導出

(1)  $A^T A$  は対称行列なので対角化可能

$$A^T A = \begin{pmatrix} n \times m \\ m \times n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{は対称な } n \times n \text{ 行列} \\ * \text{ただし } m > n \text{ とする} \end{matrix}$$

すなわち

$$R^T (A^T A) R = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} = (AR)^T (AR) \quad (a_i > 0)$$

を成立させる直交行列  $R$  を見つけることができる。

(2)

$$(AR)^T(AR) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

であるから、

$$(AR)^T = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \boxed{\mathbf{p}_1} \\ \boxed{\mathbf{p}_2} \\ \vdots \\ \boxed{\mathbf{p}_n} \end{matrix}}^m \end{pmatrix}$$

$(AR)^T$  の全ての行ベクトルは互いに直交し、各行ベクトルの長さは  $\|\mathbf{p}_i\| = \sqrt{a_i}$



(3)

したがって、ある直交行列  $R_2$  の行ベクトル  $\mathbf{q}_1 \sim \mathbf{q}_m$  が、 $1 \leq i \leq n$  ( $< m$ ) において

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_i / \sqrt{a_i}$$

を満たすように選ばれていれば、

$R_2$  は

$$R_2 A R = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & & 0 \\ & \sqrt{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{a_n} \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_{n+1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{a_1}} \mathbf{p}_1 \\ \frac{1}{\sqrt{a_2}} \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{a_n}} \mathbf{p}_n \end{matrix}$$

を満たす。

$R = R_1^{-1}$  とすれば、証明したい式となる。

# 計測の可能性を座標変換によって理解する

センサ群の出力

観測したい物理量

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

座標変換

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{R}_1\mathbf{x} \\ \mathbf{y}' = \mathbf{R}_2\mathbf{y} \end{cases}$$

$\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  は下記をみたす

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_2^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \mathbf{R}_1$$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \mathbf{x}'$$

適切に座標変換すると、  
非対角成分をゼロにできる

知りたい量の推定精度は  
特異値を見れば分かる

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix} x' + w'$$

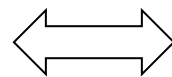
センサ群の出力  
を回転したベクトル

観測したい物理量  
を回転したベクトル

① ゼロでない  $\lambda_i$  に対応する  $x_i$  が観測可能

センサ出力の読み取り誤差が各成分一様なら、  
各固有成分の計測誤差は  $\frac{1}{\lambda_i}$  に比例

②  $\lambda_i$  の値が揃っている  $\iff$  A が直交行列



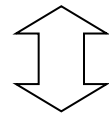
各  $x_i$  に対するセンサ出力  
ベクトルが相互に直交

## この章のまとめ(再掲)

被測定量:  $\mathbf{x}$ , ノイズ:  $\mathbf{w}$ ,  
計測システムの出力:  $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{w}$

\* ノイズ  $\mathbf{w}$  の各成分はランダムで分散が等しい.

このような計測系において  
行列  $A$  の最大特異値と最小特異値の比が1に近い



$\mathbf{x}$  の各自由度を均等な精度で測定可能

観測したい  $\mathbf{x}$  の基底に対するセンサ群の出力ベクトル  $\mathbf{y}$  が直交するシステムはよい観測系である。

## 補足

- ノイズ  $w$  の各成分の分散が等しくない場合
  - 分散が等しくなるようにスケール変換した後でこの章の方法が適用できる
- ここでの議論では、ノイズ  $w$  の成分間に相関がないことを仮定していたことに注意