

パターン計測論 講義資料 2015. 5. 13

第4章 計測の直交性

篠田 裕之

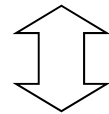
<http://www.hapis.k.u-tokyo.ac.jp/>
hiroyuki_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp

この章の結論

被測定量: \mathbf{x} , ノイズ: \mathbf{w} ,
計測システムの出力: $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{w}$

* ノイズ \mathbf{w} の各成分はランダムで分散が等しい.

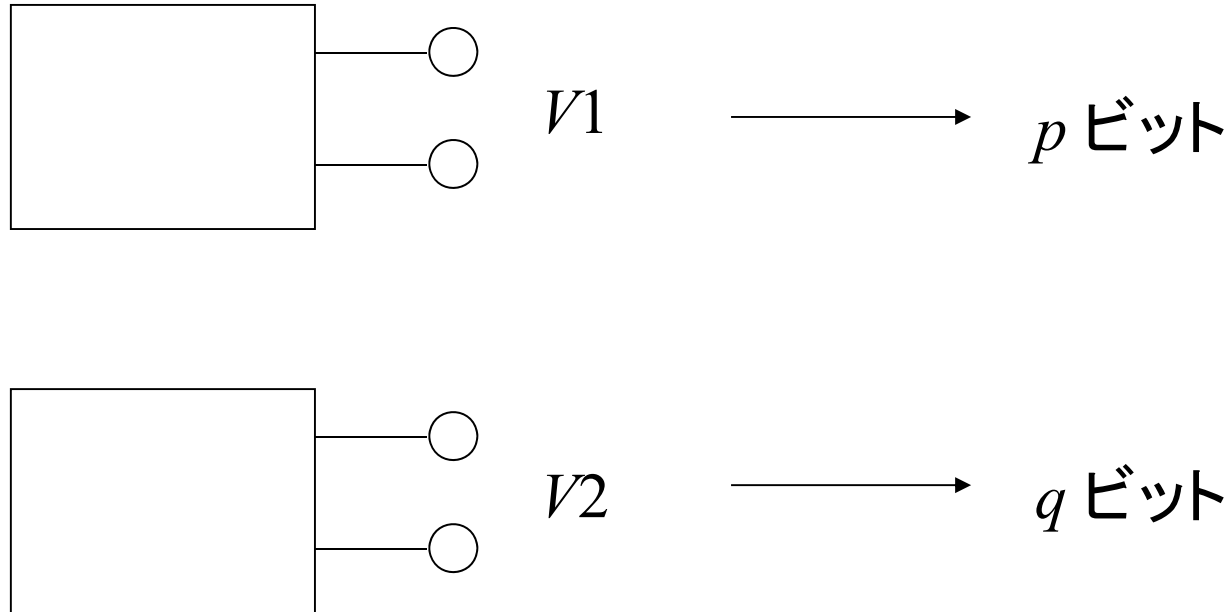
このような計測系において
行列 A の最大特異値と最小特異値の比が1に近い



\mathbf{x} の各自由度を均等な精度で測定可能

観測したい \mathbf{x} の基底に対するセンサ群の出力ベクトル \mathbf{y} が直交するシステムはよい観測系である。

観測によって得られる情報量と信号の直交性



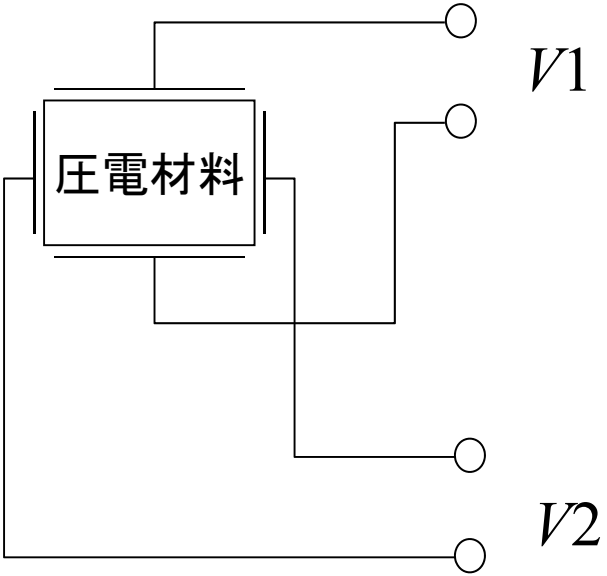
(V_1, V_2) の観測によって得られる情報量は $p + q$ ビットとは限らない

1. 信号の直交性 例1

例1) 応力センサ

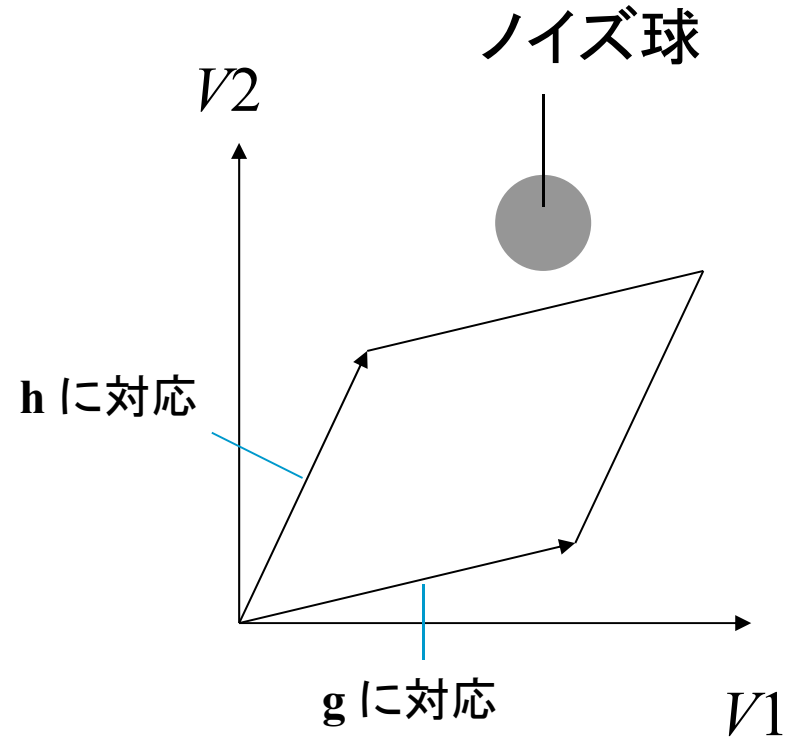
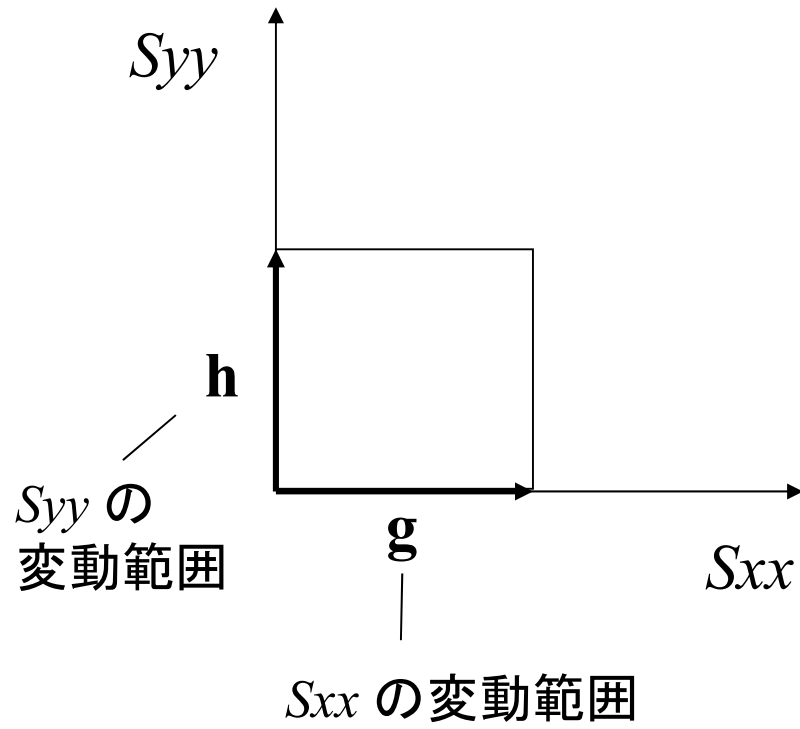
測定したい量
--- 応力 (S_{xx} , S_{yy})

計測システムの入力
--- 電圧 ($V1$, $V2$)



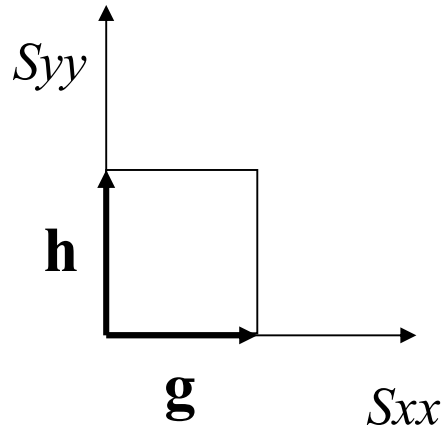
		真値	ノイズ
		↓	↓
$\begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	→	$\begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e1 \\ e2 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	→	$\begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e3 \\ e4 \end{pmatrix}$	

1. 信号の直交性 例1

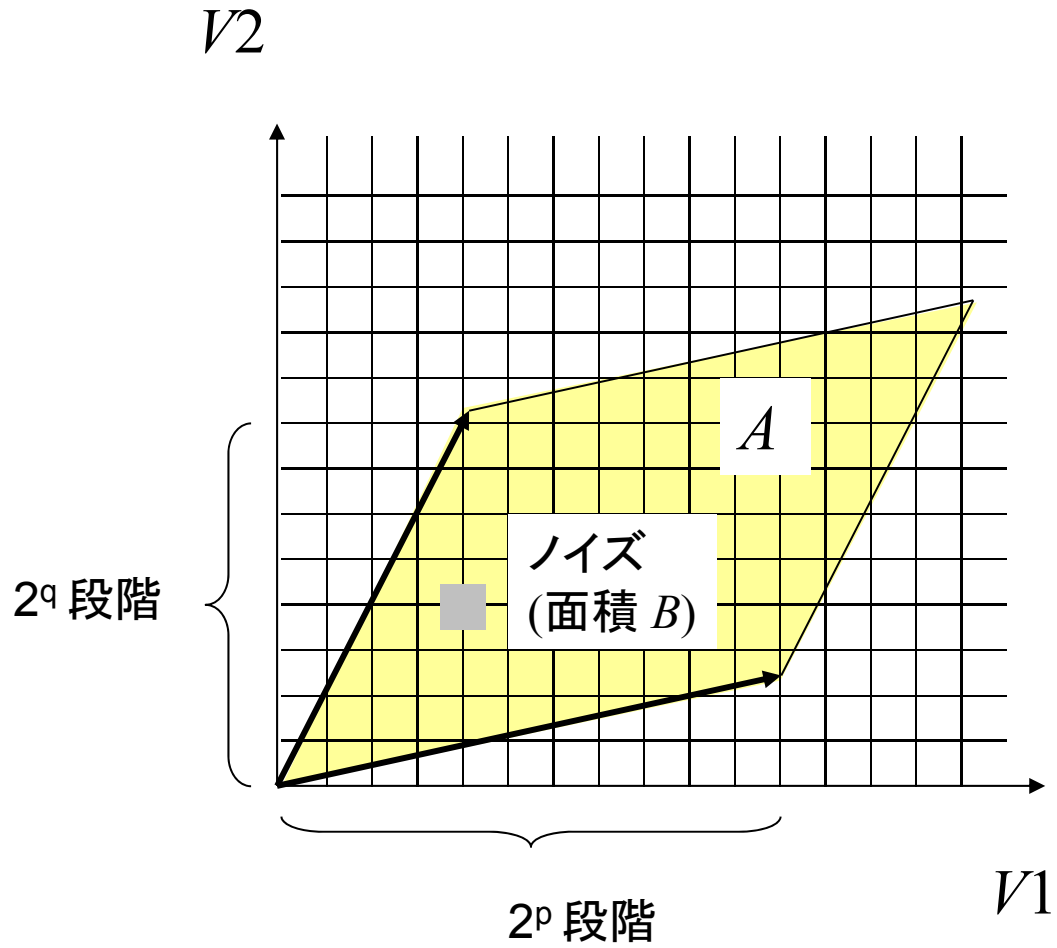


1. 信号の直交性 例1

センサが取得可能な情報量

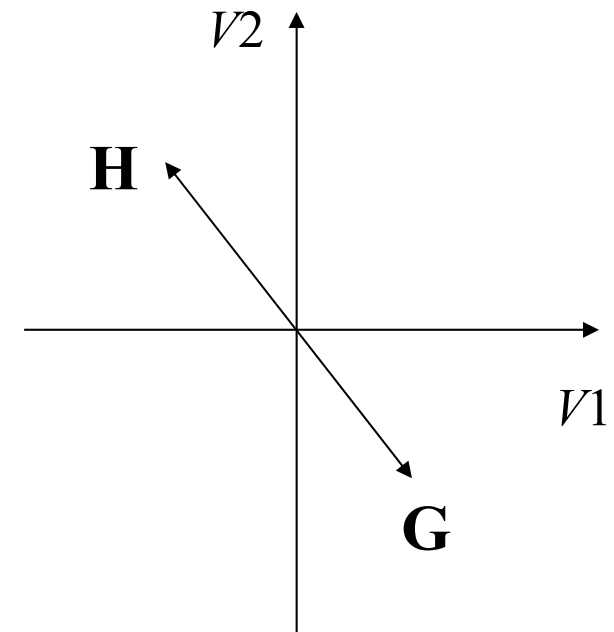
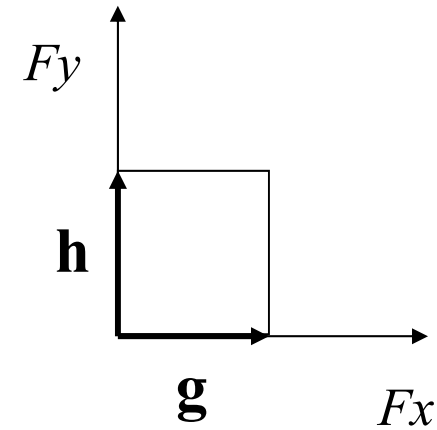
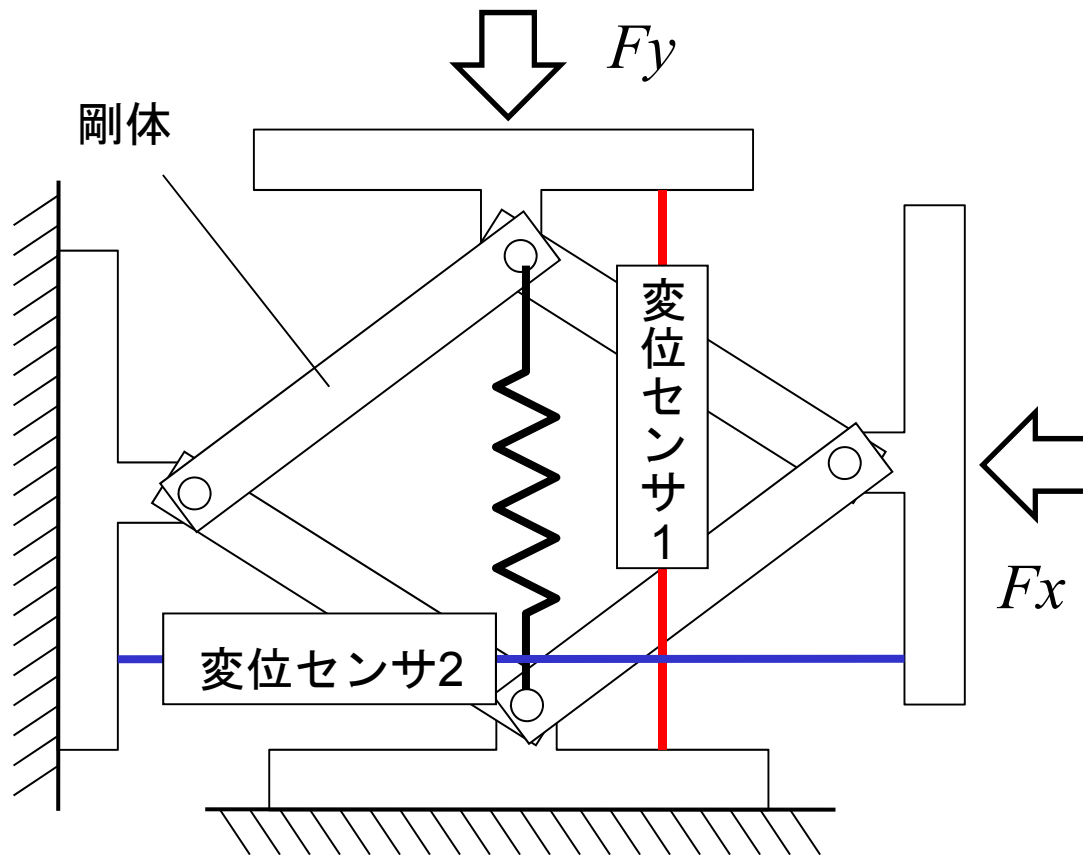


識別可能な状態数

$$\frac{A}{B}$$


1. 信号の直交性 例1-2

出力が直交しない2成分力センサ



* リンクが剛体の場合、変位センサ1, 2の出力 ($V1, V2$) から (Fx, Fy) を推定することができない

1. 信号の直交性 例1

$\mathbf{G} = -\mathbf{H}$ の場合

(F_x, F_y) は特定できない

- ただし識別可能な状態数がゼロになるわけではない
- 計測可能な成分と計測できない成分が存在する

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x + F_y \\ F_x - F_y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

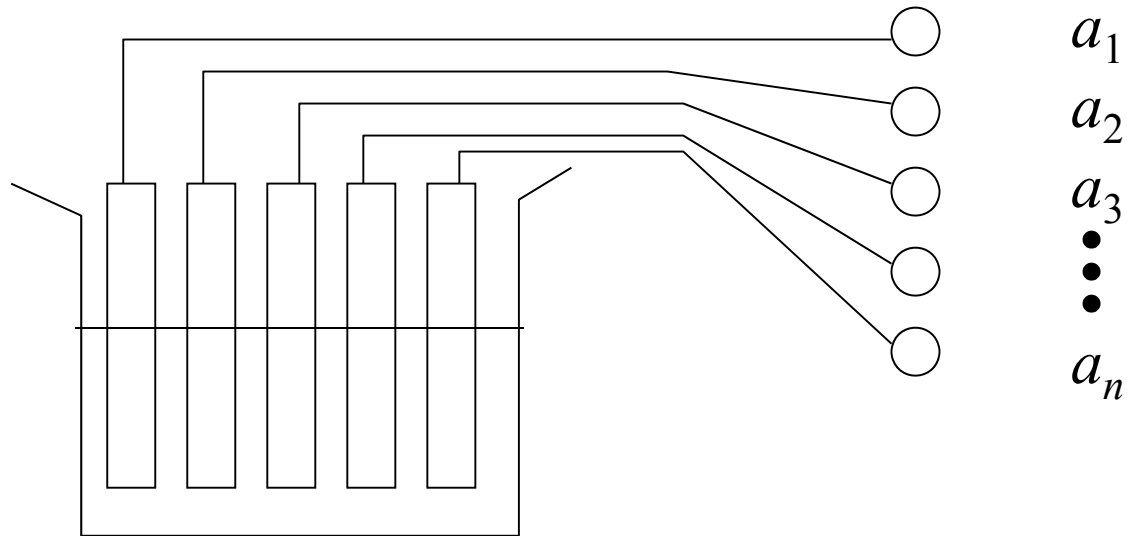
とすると、

α は測定不能

β は測定可能

1. 信号の直交性 例2

例2) 化学成分センサ



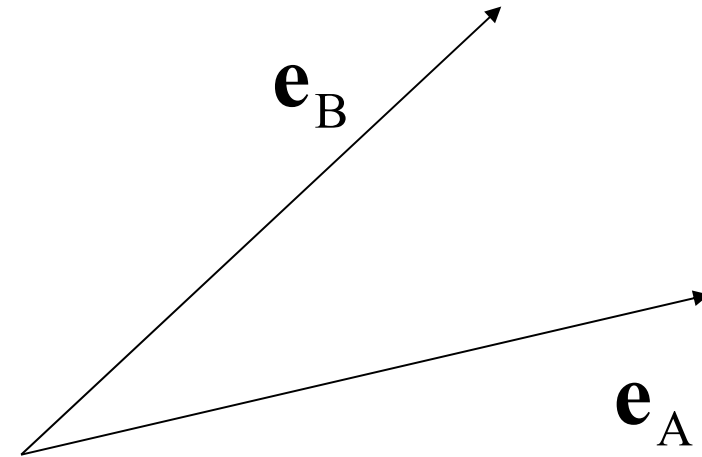
溶液 A の濃度 α に対するセンサ出力 $\longrightarrow \alpha \mathbf{e}_A, \mathbf{e}_A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

溶液 B 濃度 β に対するセンサ出力 $\longrightarrow \beta \mathbf{e}_B, \mathbf{e}_B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

1. 信号の直交性 例2

溶液 A, B の濃度を同時測定
する場合の精度決定因子

1. α に対する SN 比
2. β に対する SN 比
3. \mathbf{e}_A と \mathbf{e}_B の角度



ベクトル \mathbf{e}_A と \mathbf{e}_B がはる2次元面の面積

$$S = |\mathbf{e}_A| |\mathbf{e}_B| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B)^2}{|\mathbf{e}_A|^2 |\mathbf{e}_B|^2}}$$

1. 信号の直交性 例2

問題

ある生物が体液中の3種類の化学成分濃度 (x_1, x_2, x_3) [%] を自律的に変化・保持させることにより一種の記憶動作を行っているものとする. 体内にはそれらの濃度に対して

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

のように (y_1, y_2, y_3) を出力する3種類のセンサがあり, 感覚系の上位機構は (y_1, y_2, y_3) の各成分値を ± 0.1 以内の精度で検出できるものとする, この記憶系が一回の動作で記録可能な情報は最大何ビットか?

なお x_i は $0 < x_i < 10$ なる範囲の値を自由にとることができるものとし, 各成分の読み取り誤差間に相関は無いものとする.

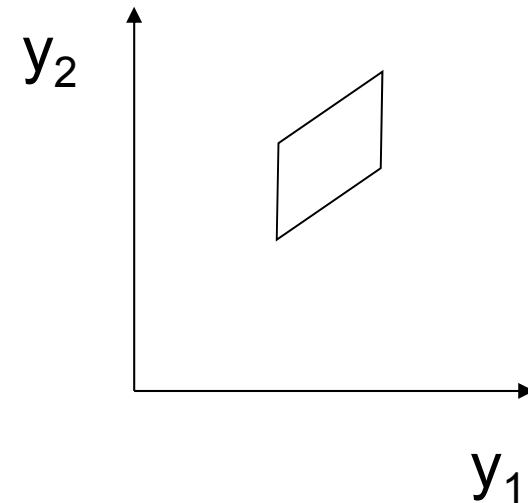
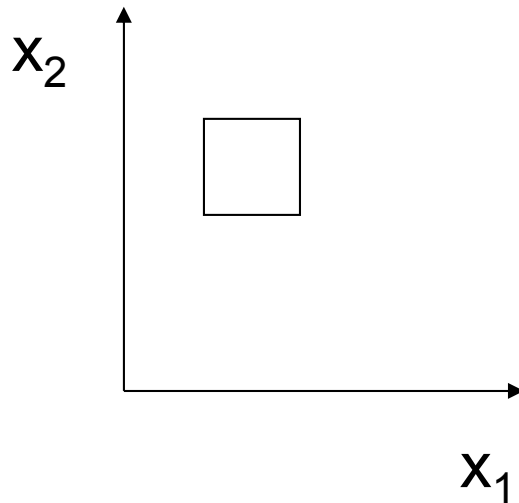
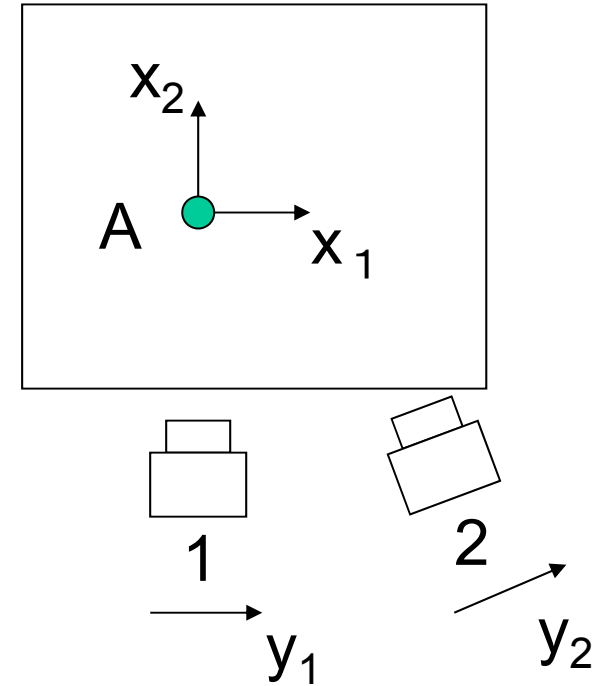
1. 信号の直交性 例3

例3) 画像計測

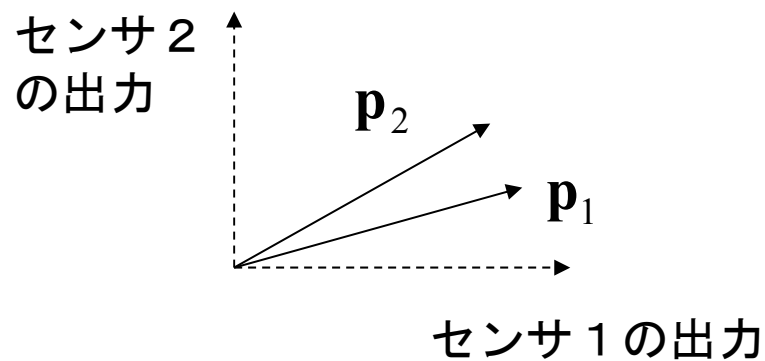
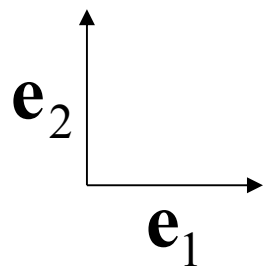
観測物体の変位の観測精度とカメラ位置の関係は？

(x_1, x_2) : 対象の位置

y_i : カメラ i で計測された位置



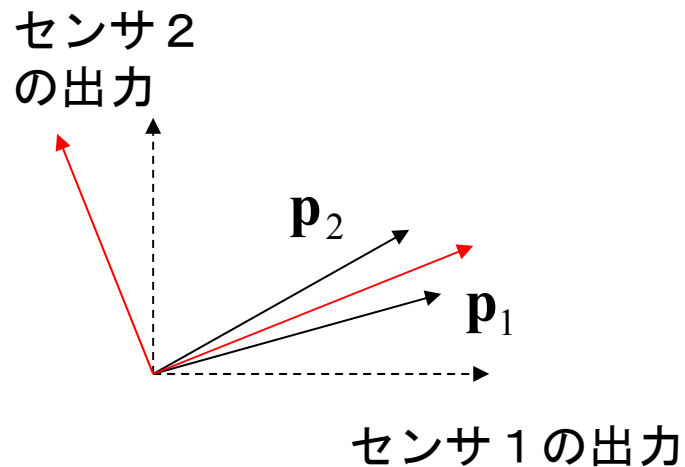
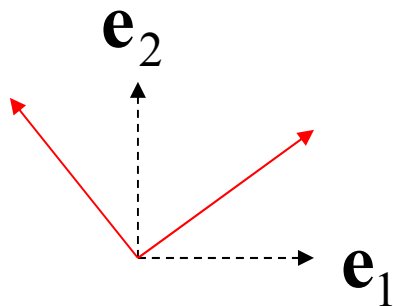
1. 信号の直交性 観測しやすい量としにくい量



観測したい物理量 x の空間

センサ出力パターン y の空間

計測システムの能力は一般にどのように記述されるか



1. 信号の直交性 特異値分解

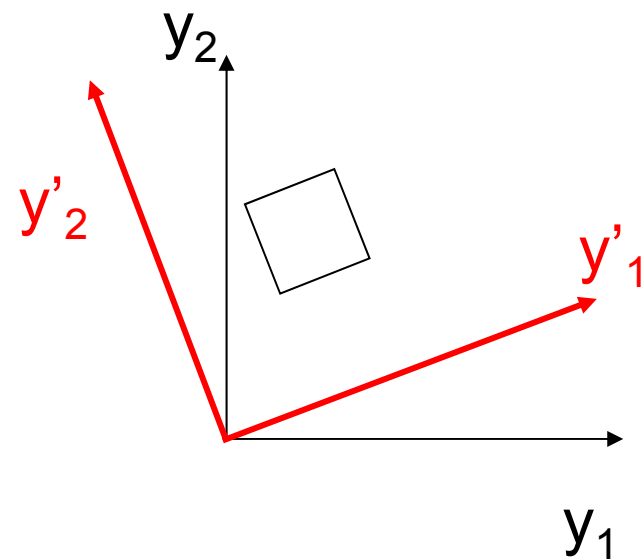
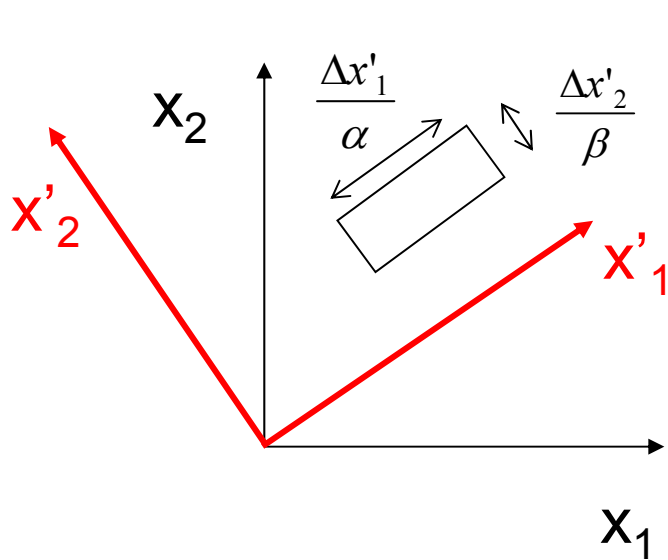
$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

➔

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

α, β: tAA の固有値の平方根



1. 信号の直交性 特異値分解

● 特異値分解

$$A = \begin{pmatrix} m \times n \end{pmatrix}$$

$$R_2 A R_1^{-1} = \begin{pmatrix} m \times m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \times n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \times n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad \longrightarrow \quad R_2\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} R_1\mathbf{x}$$

1. 信号の直交性 特異値分解

証明

(1) tAA は対称行列なので対角化可能

$${}^tAA = \begin{pmatrix} n \times m \\ m \times n \end{pmatrix} \quad \text{は対称な } n \times n \text{ 行列}$$

$${}^tT({}^tAA)T = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} = {}^t(AT)(AT) \quad (a_i > 0)$$

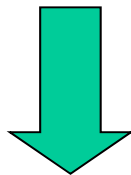
1. 信号の直交性 特異値分解 証明

(1)

$${}^t(AT)(AT) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

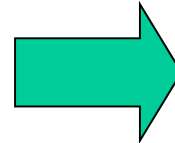
(2)

$${}^t(AT) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{pmatrix} \quad \|\mathbf{p}_i\| = \sqrt{a_i}$$



(3)

$$R_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_1}} \mathbf{p}_1 \\ \frac{1}{\sqrt{a_2}} \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{a_n}} \mathbf{p}_n \\ \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{m-n} \end{pmatrix}$$



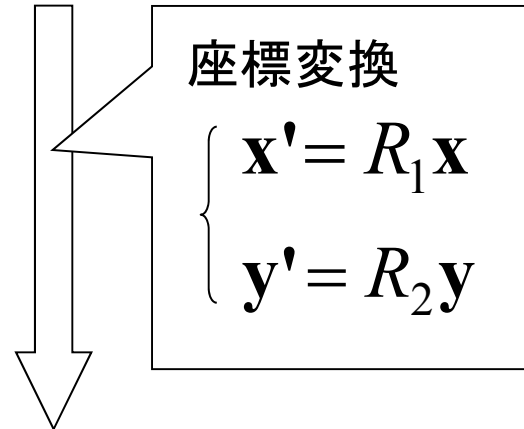
(4)

$$R_2 AT = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & 0 \\ & \sqrt{a_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \sqrt{a_n} \end{pmatrix}$$

1. 信号の直交性 特異値分解

センサ群の出力 観測したい物理量

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

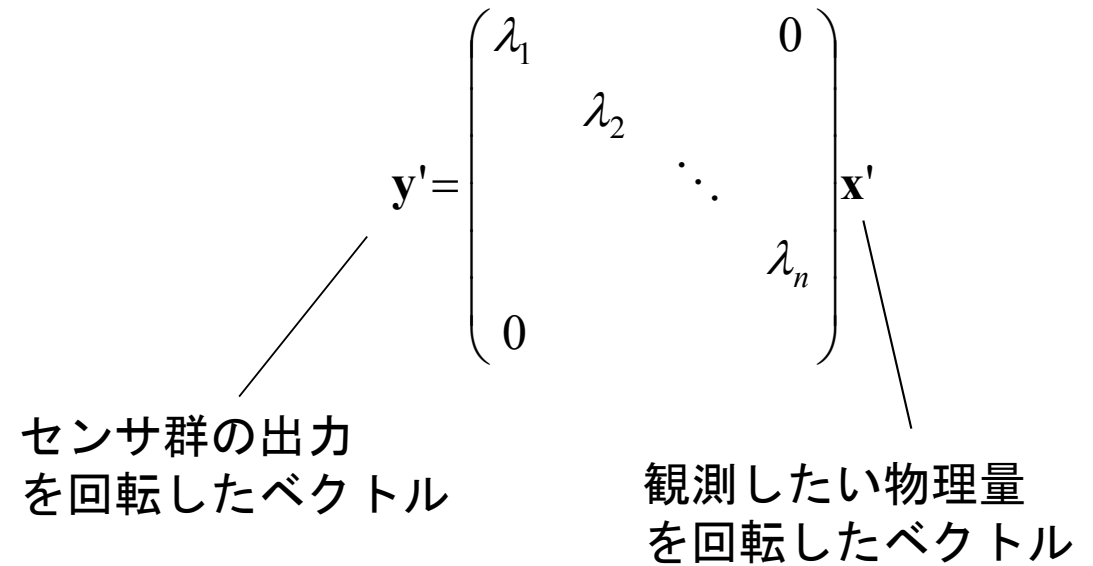


$$\left[\begin{array}{l} R_1, R_2 \text{ は下記をみたす} \\ A = R_2^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ 0 & & & & \end{pmatrix} R_1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \mathbf{x}'$$

適切に座標変換すると、
非対角成分をゼロにできる

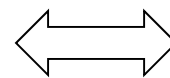
1. 信号の直交性 特異値分解



① ゼロでない λ_i に対応する x_i が観測可能

センサ出力の読み取り誤差が各成分一様なら、
各固有成分の計測誤差は $\frac{1}{\lambda_i}$ に比例

② λ_i の値が揃っている \iff A が直交行列



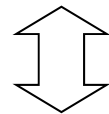
各 x_i に対するセンサ出力
ベクトルが相互に直交

この章のまとめ(再掲)

被測定量: \mathbf{x} , ノイズ: \mathbf{w} ,
計測システムの出カ: $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{w}$

* ノイズ \mathbf{w} の各成分はランダムで分散が等しい.

このような計測系において
行列 A の最大特異値と最小特異値の比が1に近い



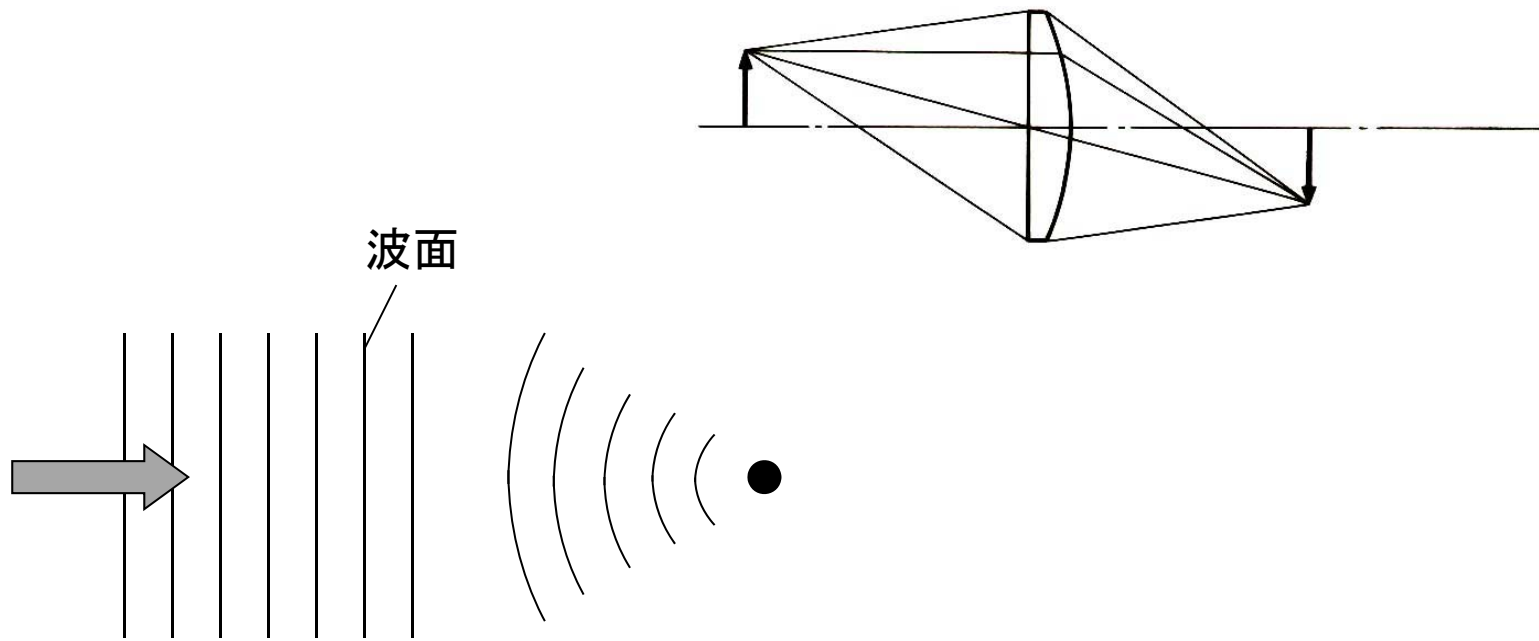
\mathbf{x} の各自由度を均等な精度で測定可能

観測したい \mathbf{x} の基底に対するセンサ群の出カベクトル \mathbf{y} が直交するシステムはよい観測系である。

補足

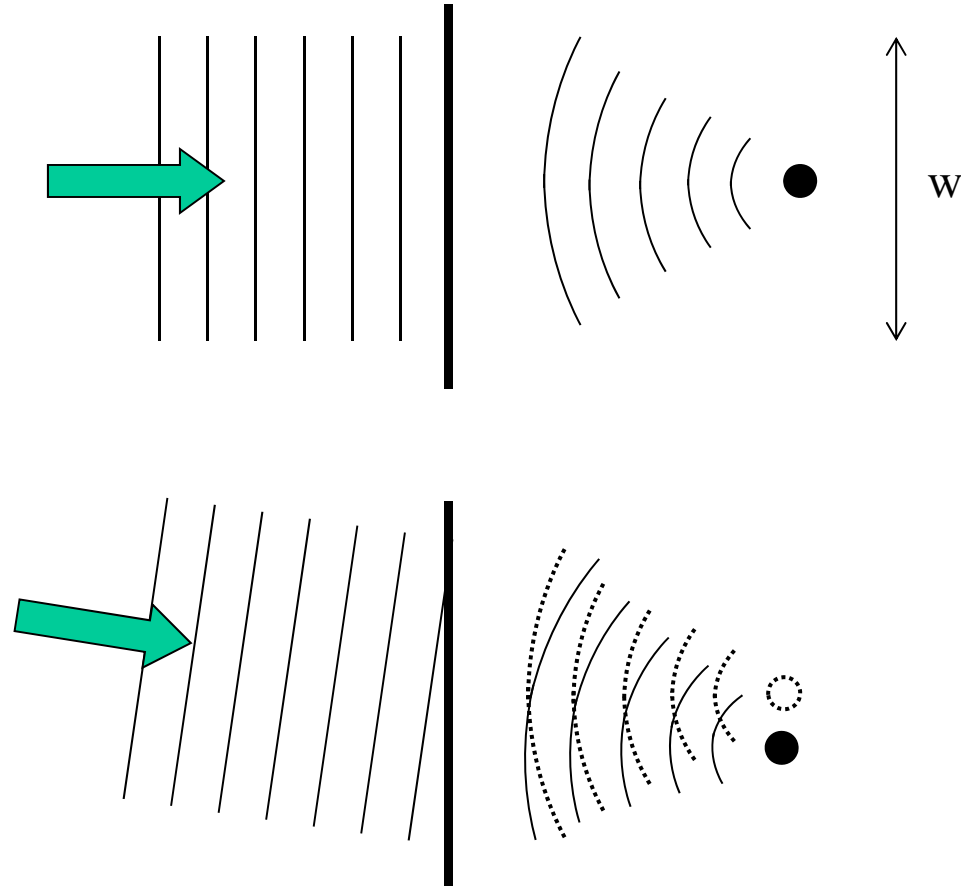
- ノイズ w の各成分の分散が等しくない場合
 - 分散が等しくなるようにスケール変換した後でこの章の方法が適用できる
- ノイズ w の各成分値がランダムでない場合.
また、成分相互に相関がある場合.
 - 考察が必要
例) 差動計測

レンズの役割



レンズの役割

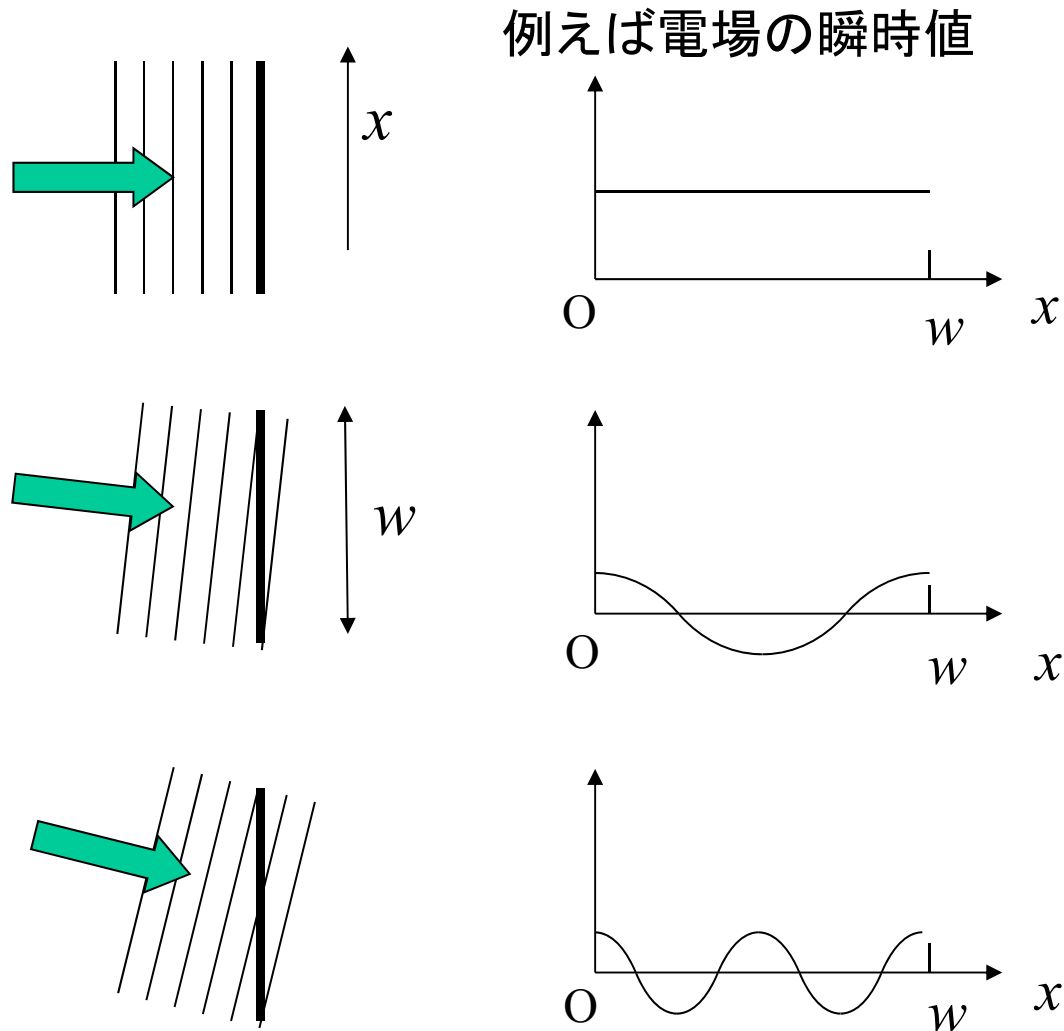
到来方向を見分ける手がかりは観測面上の位相パターン



波源の方向を分解する能力の限界は $\frac{\lambda}{w}$ rad 程度

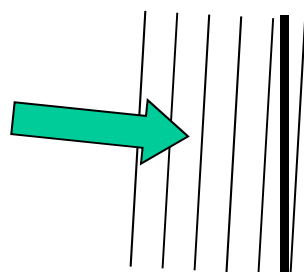
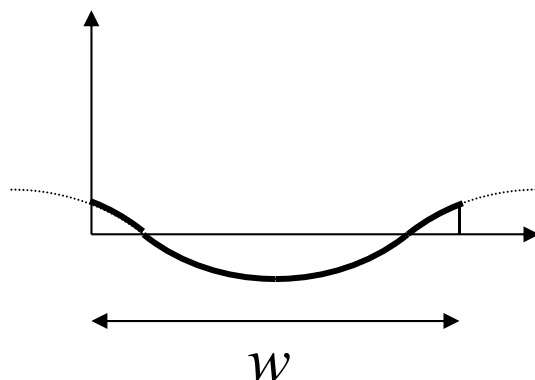
(2次元問題)

幅 w の開口で(線分上で)波動を観測して波動の到来方向を決定することは、区間 w における観測値から周波数を決定する問題と等価である



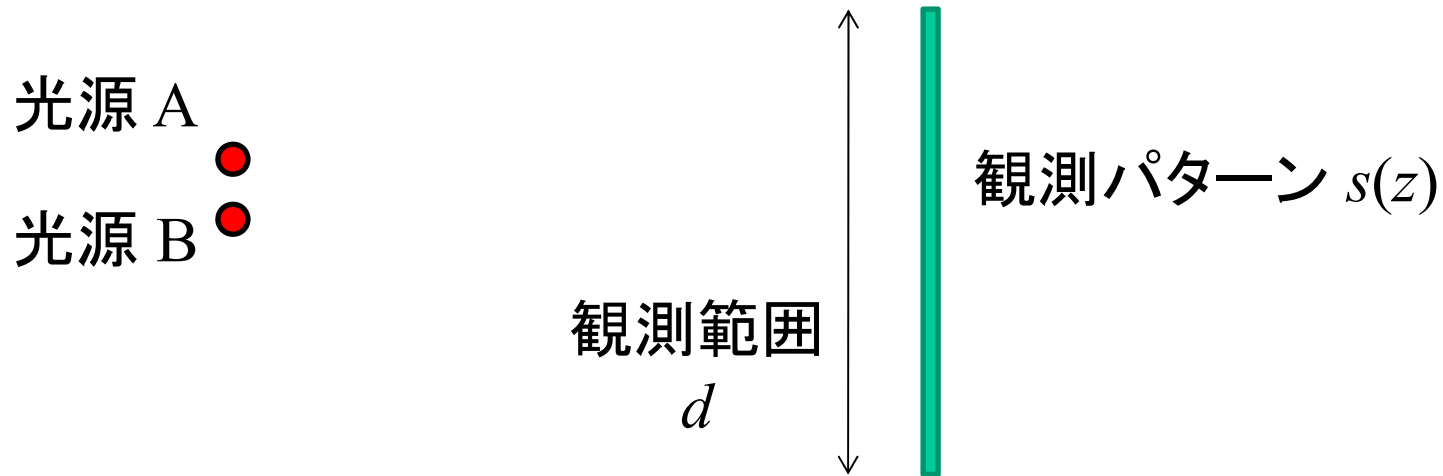
「方向が完全に特定できない」＝「周波数が完全に決定できない」
とはどういうことか？

例えば下図のように、観測区間より長い周期をもつ正弦波の一部が観測されたとすると



左図のように、波源が一つの場合だけでなく、複数の波源が存在してそれらが重なった結果、上図のようなパターンが観測されている可能性もある

開口と計測の直交性の関係



互いに近くに存在する光源AとBを見分けたい。

Aによって形成されるパターン $s_A(z)$ と
Bによって形成されるパターン $s_B(z)$ の直交性を

1. 光強度を計測する場合と位相を計測する場合
2. d が大きい場合と小さい場合

について比較せよ

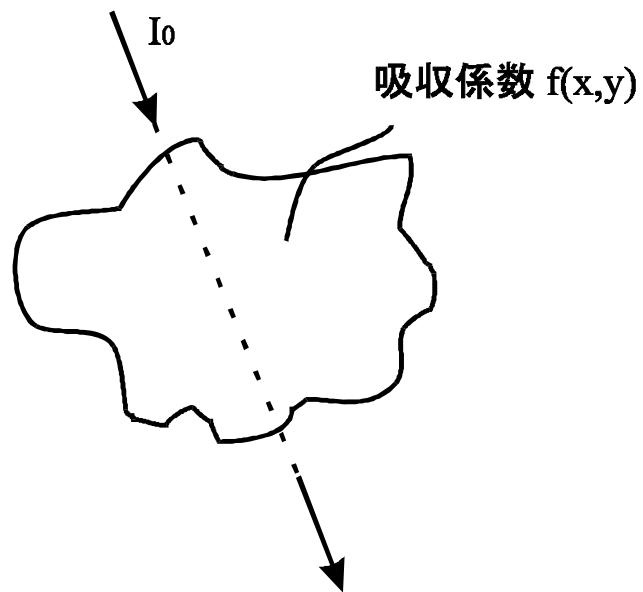
付録 X線CT (Computed Tomography)

X線の発見



Wilhelm Röntgen 1895

X線の透過特性



$$I = I_0 \exp\left(-\int f ds\right) \quad \text{より}$$

$$-\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \int f ds$$

吸収係数の経路和が観測できる。

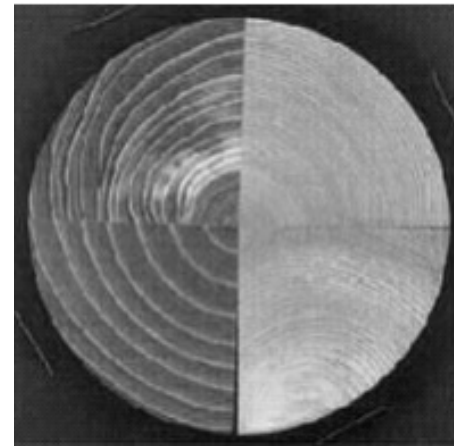
付録 X線CT



X線写真



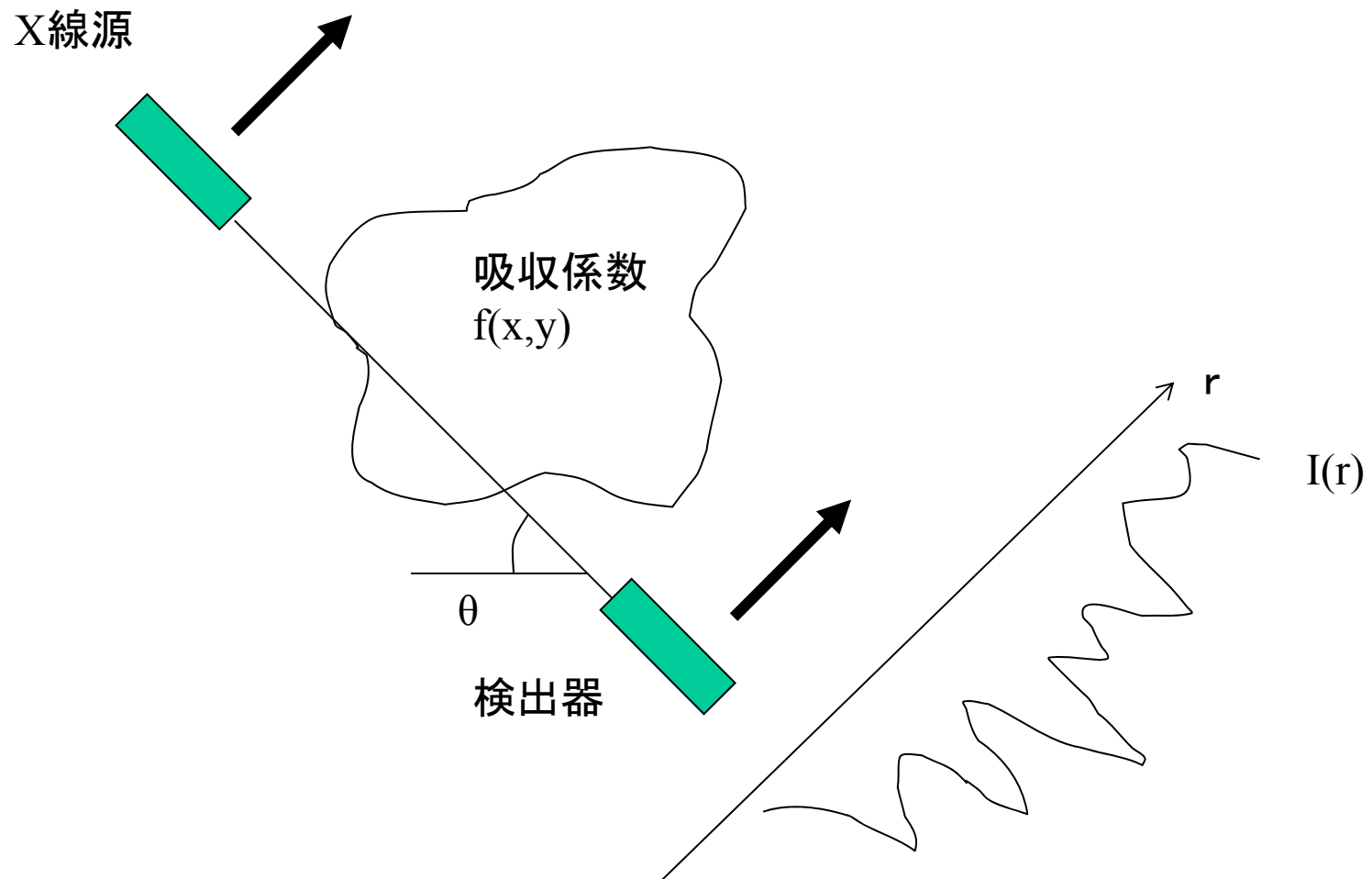
頭部断層像



木材断層像

付録 X線CT

全ての θ に対して $I(r)$ を検出すれば $f(x,y)$ が求まるか？



付録 X線CT

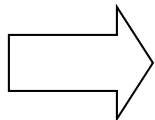
2次元フーリエ変換 $F(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{x}) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$

原像を回転 ---> 変換像も同じだけ回転

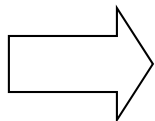
[証明]

回転: $f'(\mathbf{x}) = f(R\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} F'(\mathbf{k}) &= \int f(R\mathbf{x}) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int f(R\mathbf{x}) \exp(j(R\mathbf{k}) \cdot (R\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \int f(\mathbf{x}) \exp(j(R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = F(R\mathbf{k}) \end{aligned}$$



$I(r)$ のフーリエ変換は $F(k)$ の断面 (中央断面定理)



全方向の $I(r)$ で二次元平面を埋め、2次元逆フーリエ変換すればよい