パターン計測論 講義資料　2015. 5. 7

第3章　アナログパターンの情報量

篠田 裕之

http://www.hapis.k.u-tokyo.ac.jp/

hiroyuki_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp

変調の方式と識別可能な状態数

[1] 信号長は N 点.
[2] ノイズは白色. エネルギーは W.
[3] 信号のエネルギーは $S_{\max}$ 以下.

① 振幅変調 $\sqrt{N\frac{S_{\max}}{W}}$ 通り

＊ある一つの波形の振幅のみで情報を伝える場合

② 周波数変調 $N\sqrt{N\frac{S_{\max}}{W}}$ 通り

③ PIM $N\sqrt{N\frac{S_{\max}}{W}}$ 通り

④ 直交信号の組み合わせ

$$
\begin{cases}
2^{NS_{\max}/W} \text{ 通り} & (S_{\max} < W) \\
\left(\sqrt{\frac{S_{\max}}{W}}\right)^{N} \text{ 通り} & (S_{\max} > W)
\end{cases}
$$

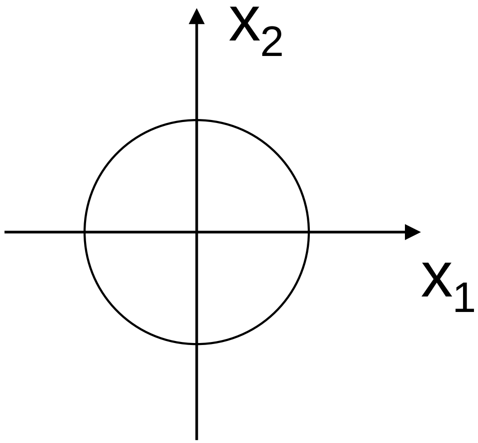
注意： 定数係数については考慮外

アナログパターンから読み取れる情報量の理論限界

記号、シグナル、ノイズ --- 情報理論入門

J. R. ピアース著　鎮目恭夫訳　白揚社

多次元空間における球

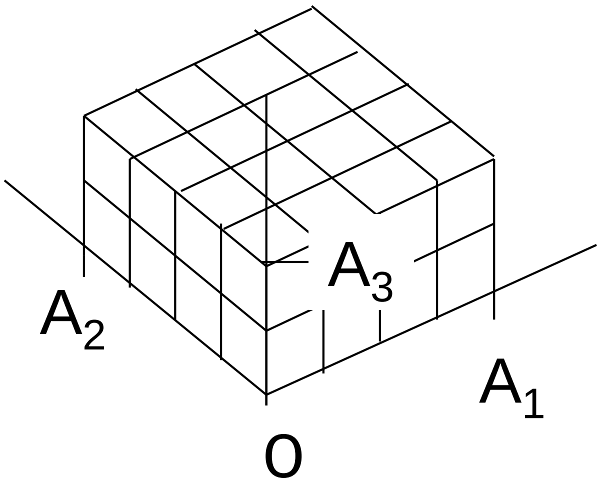


２次元　$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

３次元　$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

n 次元　$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$$

1. 信号は多次元空間中の一点



「体積」の概念

例） n 次元空間内の領域

$$0 < x_i < A_i \qquad (i = 1,2,\cdots n)$$

に単位立方体

$$0 < x_i < 1 \qquad (i = 1,2,\cdots n)$$

はいくつ入るか？

1. 信号は多次元空間中の一点

球の体積

２次元　πr^2

３次元　$\dfrac{4\pi}{3} r^3$

n次元　Ar^n　　$A(2m) = \dfrac{\pi^m}{m!}$

1. 信号は多次元空間中の一点

信号の存在範囲

$$|\mathbf{x}|^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_N^2 < S$$

ノイズの存在範囲

$$|\mathbf{x}|^2 < W$$

信号＋ノイズの存在範囲

$$\boxed{|\mathbf{x}|^2 < S + W}$$

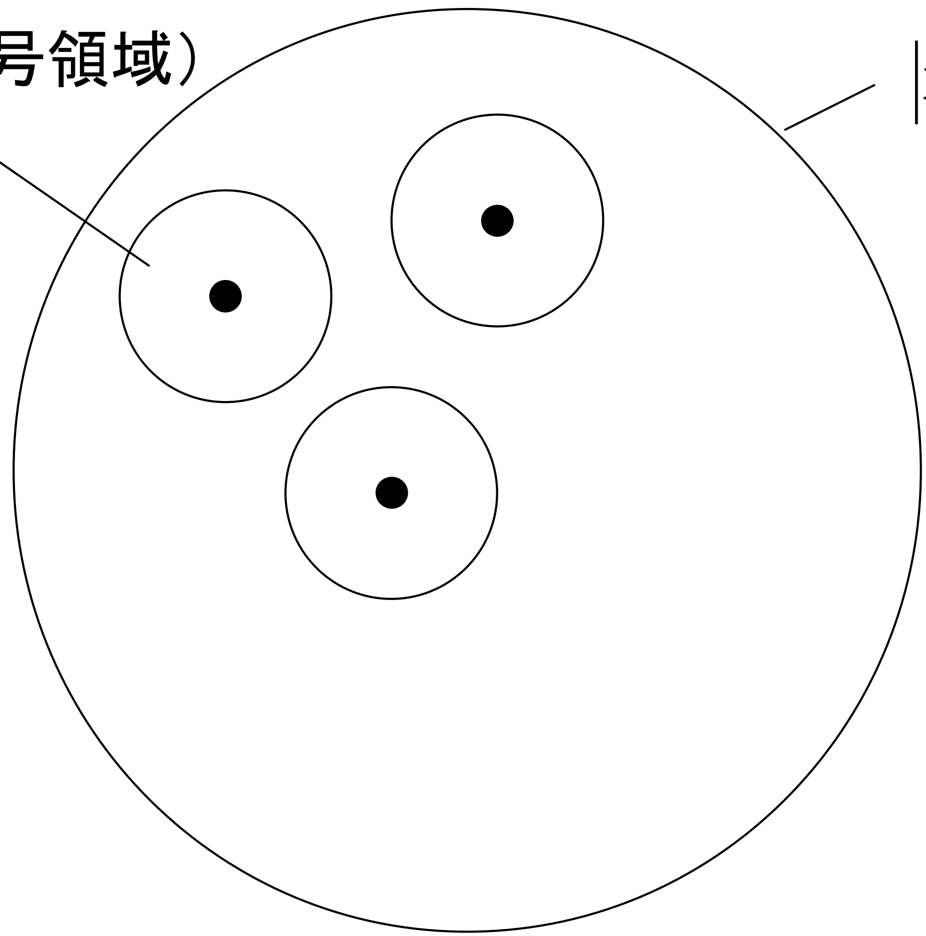
？？？

1. 信号は多次元空間中の一点

伝達可能な情報量

ノイズ球（復号領域）

体積 U



$$|\mathbf{x}|^2 < \left(\sqrt{S} + \sqrt{W}\right)^2 \ ?$$

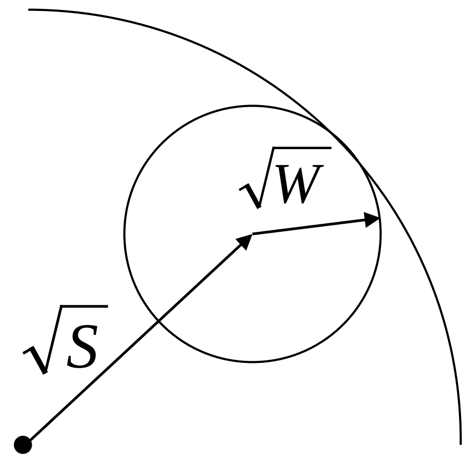
体積 V

識別可能な状態数の上限 = V/U

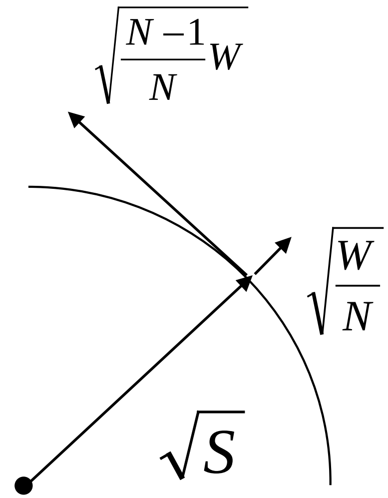
2. 信号+ノイズの存在範囲

低次元の場合

$$|\mathbf{x}|^2 < \left(\sqrt{S}+\sqrt{W}\right)^2$$

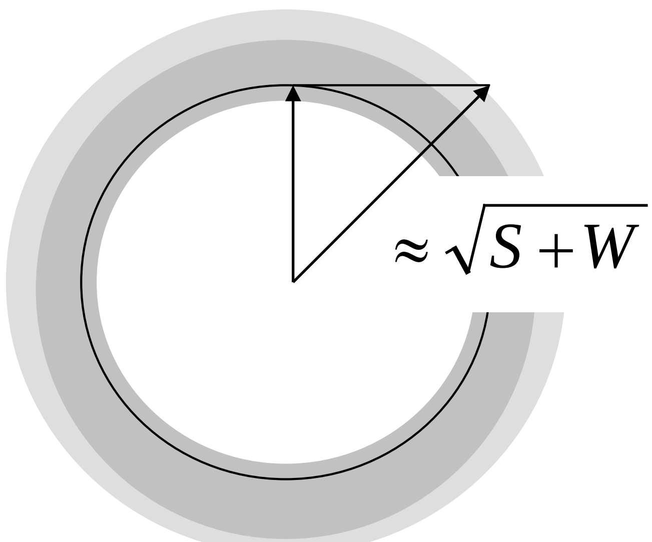


2. 信号＋ノイズの存在範囲



高次元の場合

ノイズの大半の成分は信号と直交



3. 誤りなく伝送可能な情報量の上限

（信号＋ノイズ）球の体積

$$H = \log \frac{A(N)\sqrt{S+W}^{N}}{A(N)\sqrt{W}^{N}} = \log \sqrt{\frac{S+W}{W}}^{N} = \boxed{\frac{N}{2}\log\left(1+\frac{S}{W}\right)} \quad \text{ビット}$$

ノイズ球の体積

N: 信号点数
S: 信号エネルギ
W: ノイズエネルギ（白色）

○ これ以上の情報を誤りなく送ることができないことは確かだが、
この段階では本当に H ビットの情報を送れるかどうかは分からない

3. 誤りなく伝送可能な情報量の上限

H の近似値

$W >> S$ のとき

$$\frac{N}{2}\log\left(1+\frac{S}{W}\right) \approx \frac{1}{2\log_e 2}\frac{NS}{W} \quad \left(= 0.72\frac{NS}{W}\right)$$

$W << S$ のとき

$$\frac{N}{2}\log\left(1+\frac{S}{W}\right) \approx \log\sqrt{\frac{S}{W}}^{N}$$

＊上記は、第2章で考えた 2つの戦略 の結果に一致

第2章の「符号の伝送」で考えた2つの戦略

$S < W$ のとき --- 戦略1

信号の存在を確認できる最小エネルギをもち、互いに直交する
m 個の関数 $\{\eta\phi_1, \eta\phi_2, \ldots, \eta\phi_m\}$ を用意する。
各関数が存在するかしないかの組み合わせで情報を伝達する。

$$s(n) = a_1\eta\phi_1(n) + a_2\eta\phi_2(n) + \cdots + a_m\eta\phi_m(n) \qquad (\ a_i = 1 \text{ or } 0\ )$$

*2進数 $a_1 a_2 \ldots a_m$ を伝達する。

$S > W$ のとき --- 戦略2

N 次元の空間を張る正規直交基底 $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N\}$ を用意する。
各基底関数 ϕ_i に、

$$-\sqrt{S/N} < s_i < \sqrt{S/N}$$

の重みをつけ、送信する。受信側は各 s_i を観測する。ここで s_i は
離散的な値をとるものとし、ノイズが加算されてもそれらが正しく
同定されるような間隔で設定されている。

3. 誤りなく伝送可能な情報量の上限

[補足] 戦略2で伝送可能な情報量

・N 個の基底に重みをつけて伝送する
・各基底に割り当てるエネルギの最大値を S/N とする

〇誤りなく同定できる各基底の重みの段階数は

$$\sqrt{\frac{S/N}{W/N}} = \sqrt{\frac{S}{W}} \text{ 段階}$$

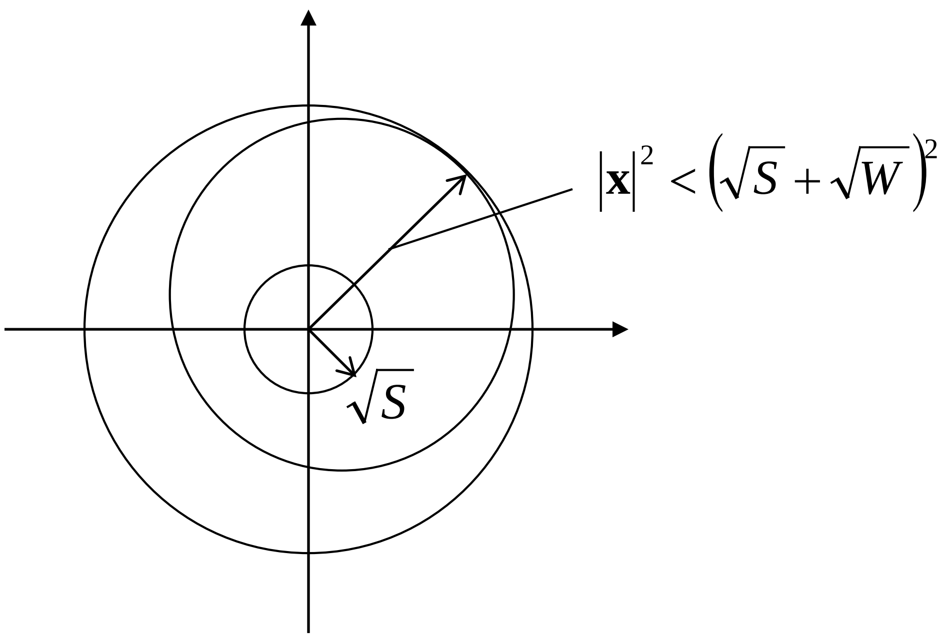
〇誤りなく伝達できる信号バリエーションの数

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{S}{W}}\right)^N \text{ 通り}$$

4. 多次元空間の分割

ノイズ球の半径が信号球の半径より大きい場合

Ｓ＜Ｗの場合、識別可能な状態数は１？



4. 多次元空間の分割　高次元での球 1

次元が大きくなると事情が変わる

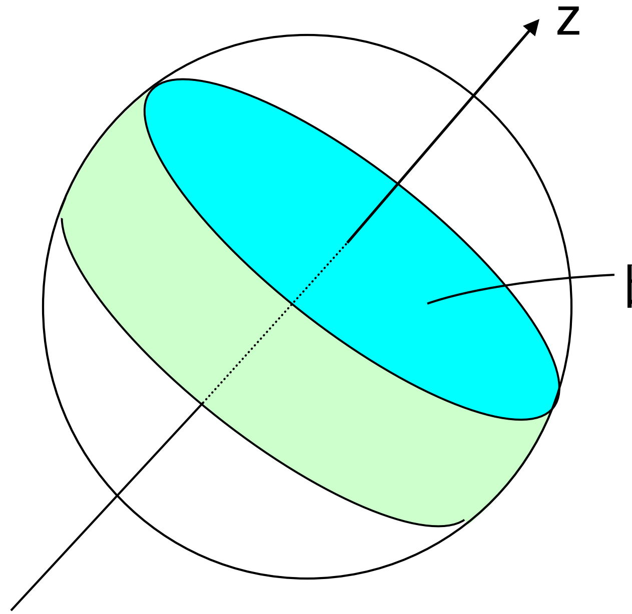
体積の大部分が表面近くにある

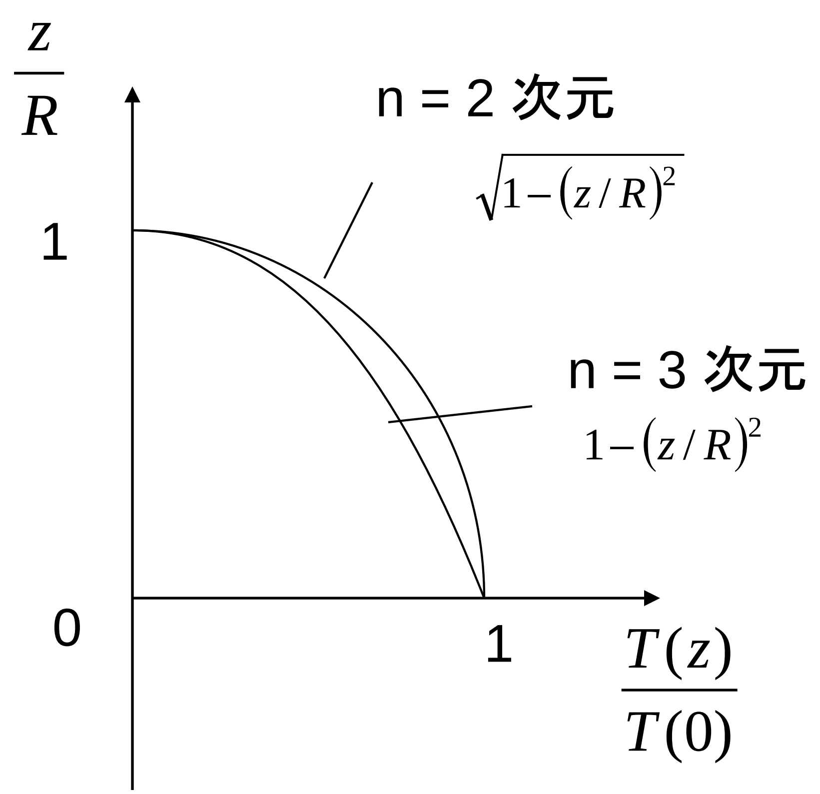
$$\frac{\text{半径}0.99\text{の球の体積}}{\text{半径 1 の球の体積}} = 0.99^n$$

$$0.99^{300} = 0.05$$

4. 多次元空間の分割　高次元での球　2-1

体積の大部分が赤道近くにある





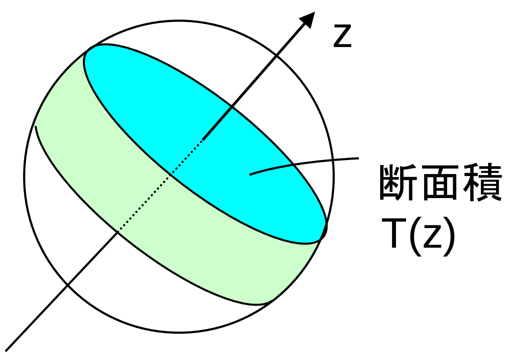
4. 多次元空間の分割　高次元での球 2-2

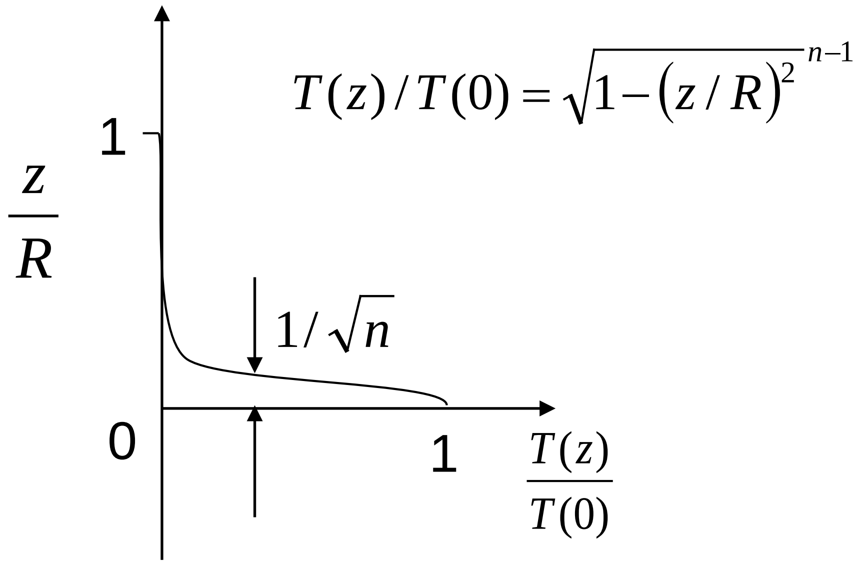
n 次元球の断面積の大きさ

原点から距離 z 離れた n-1 次元平面による断面積

$\longrightarrow$ 半径 $\sqrt{R^2 - z^2}$ の n-1 次元球の体積

$$BR^{n-1}\sqrt{1 - z^2/R^2}^{\,n-1}$$



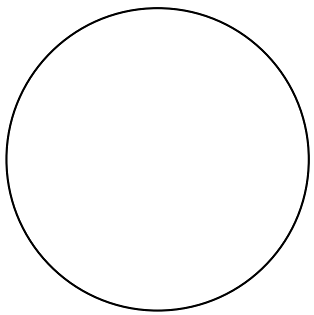


5. 信号空間はどのように分割されているか？

$S > W$ の場合

球と立方体の体積

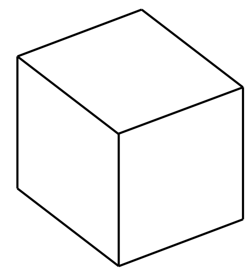
半径 R の球



$$V = \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!} R^N \quad (N\text{: 偶数})$$

$$\log V = N \log_e R - \frac{N}{2} \log_e \left(N / 2\pi e \right)$$

一辺 $\frac{R}{\sqrt{N/2\pi e}}$ の立方体

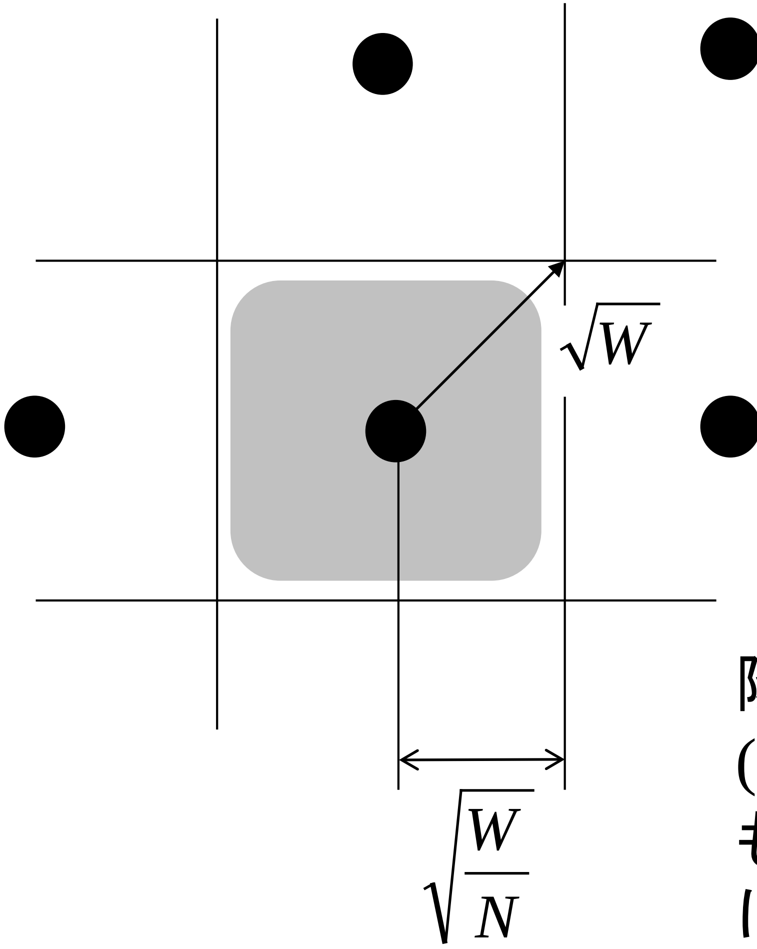


$$V = \frac{R^N}{(N/4\pi e)^{N/2}}$$

$$\log V = N \log_e R - \frac{N}{2} \log_e \left(N / 2\pi e \right)$$

5. 直交格子による分割

垂直と「斜め」で境界までの距離が著しく異なる



信号 i

隣の信号までの距離を $(W/N)^{1/2}$ 程度まで近づけてもノイズ球の重なりの体積は小さい

5. 直交格子による分割

（信号＋ノイズ）の存在範囲の体積

$$\log \frac{A(N)\left(\sqrt{S+W}\right)^N}{\left(\alpha\sqrt{\dfrac{W}{N}}\right)^N} = \log\sqrt{\frac{S+W}{W}}^N = \boxed{\frac{N}{2}\log\left(1+\frac{S}{W}\right)}$$

一辺 $\alpha\sqrt{\dfrac{W}{N}}$ の多次元立方体の体積

$\alpha = \sqrt{2\pi e} = 4.13$ とすると

半径 $\sqrt{W}$ の球の体積に等しい

今回の講義のまとめ

パターン **x** から読み取れる情報量は，　**x+w** が動き得る空間をノイズ領域で分割した個数で評価できる.