

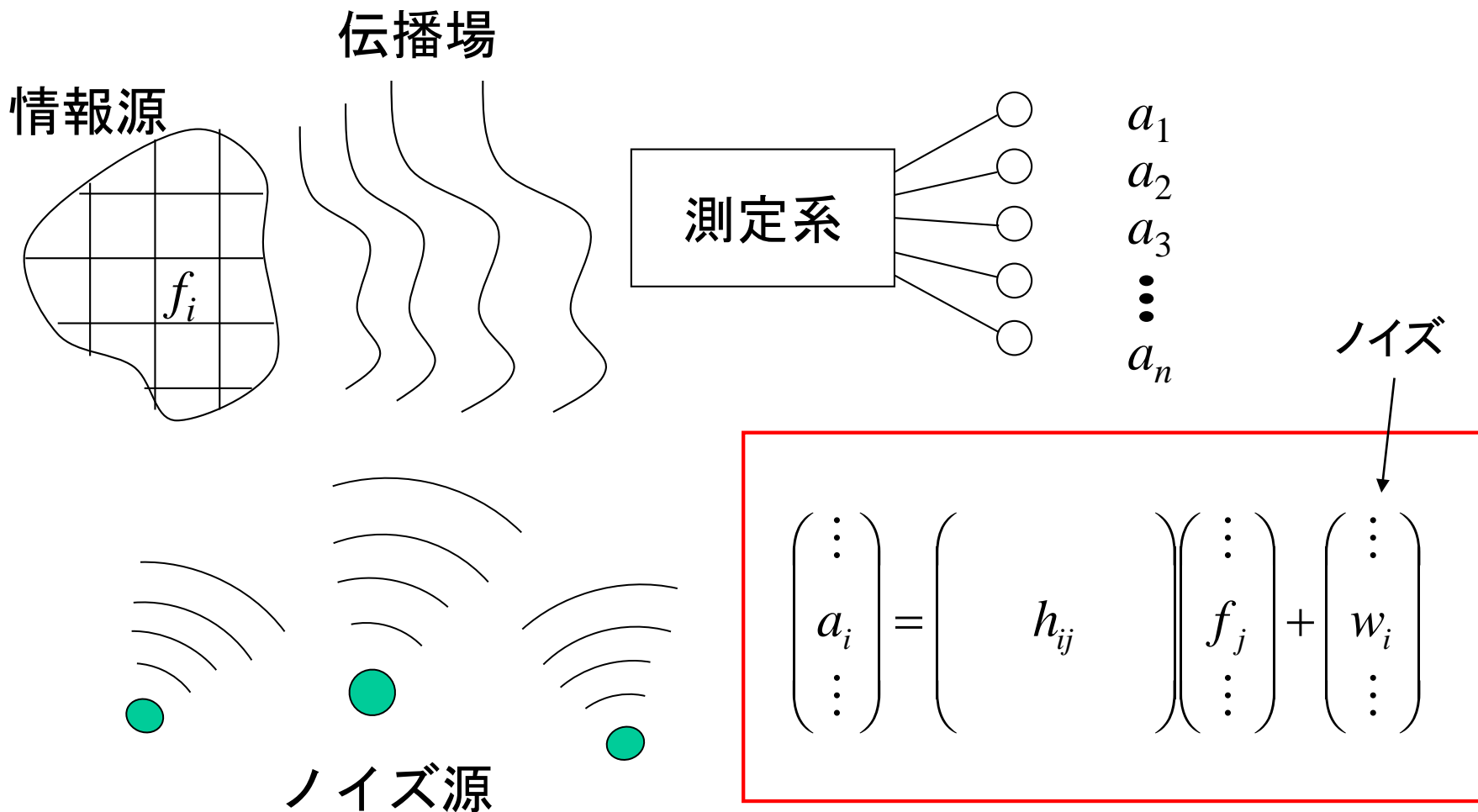
パターン計測論 講義資料 2015. 4. 22

第2章 信号とノイズ ②

篠田 裕之

<http://www.hapis.k.u-tokyo.ac.jp/>  
[hiroyuki\\_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp](mailto:hiroyuki_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp)

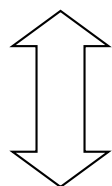
# 線形系におけるパターン計測



測定値  $a$  から  $f$  を求める

# 1. 情報量とは

ある媒体に記録可能な情報量が  $n$  ビット  
である



区別できる状態\*が  $2^n$  とおり存在する

ハードディスク、メモリ  
本  
音楽 CD  
レコード？

\* 各状態と事象(意味)との対応表は別途作成する

# 1. 情報量とは

情報量の1つの指標(情報容量)

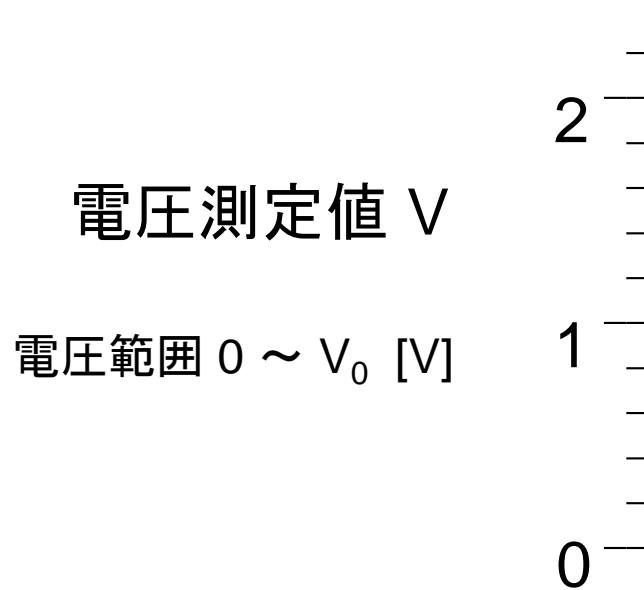
$$I = \log_2 (\text{起こり得る事象の数})$$

対数をとる意義

- ・ 試行の回数に比例
- ・ 記録に必要な文字の数に比例

## 2. ノイズの中で伝達可能な情報量

### 1) スカラー計測の場合



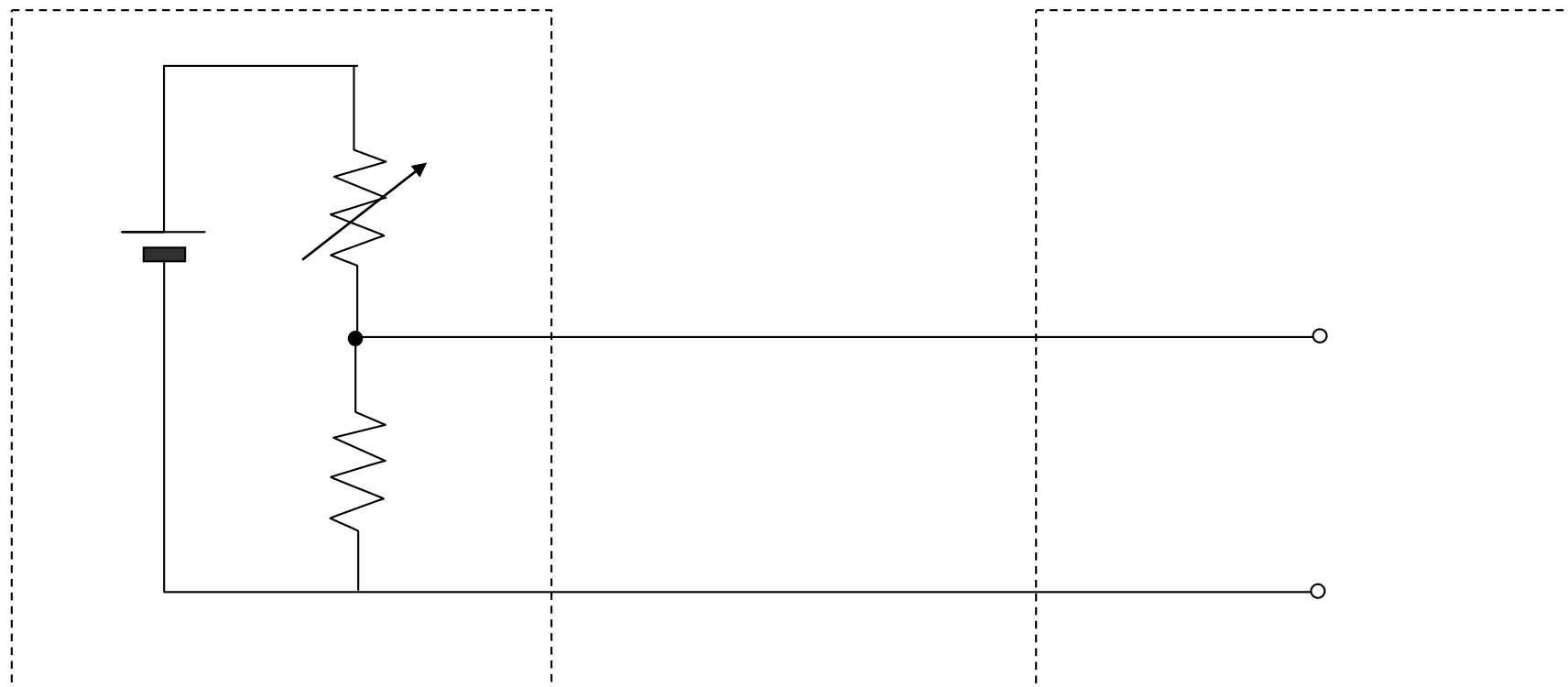
見分けられる電圧値の数  $I$  は

$$I = \infty ?$$

## 2. ノイズの中で伝達可能な情報量

### 電圧値による通信

送信者が設定した一定電圧を受信者が読み取ることで情報を伝達する。



送信者

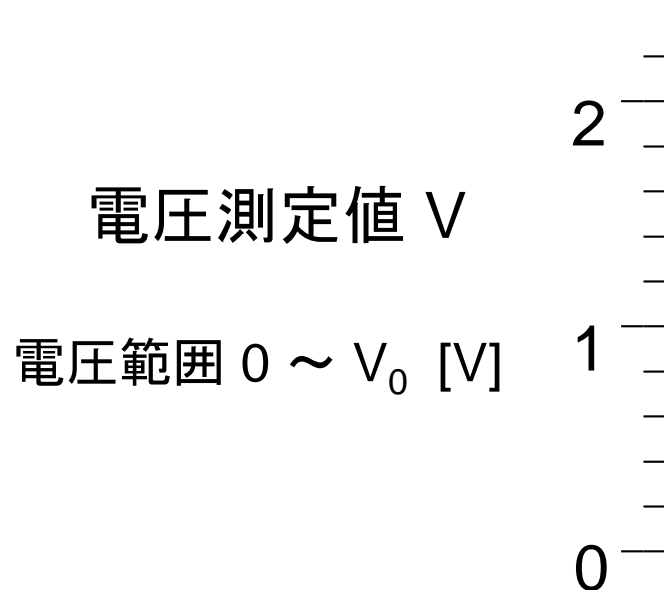
受信者

一瞬で無限大の情報が伝達できる??

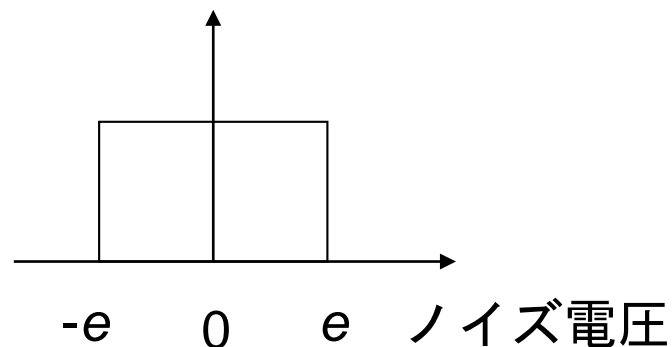
## 2. ノイズの中で伝達可能な情報量

## 1) スカラー計測の場合

ノイズが存在する場合



ノイズ電圧の確率密度



上記ノイズ電圧確率密度のもと  
1回の測定で識別可能な電圧値

最大  $\frac{V_0}{2e}$  通り

## 2. ノイズの中で伝達可能な情報量      1) スカラー計測の場合

$\frac{V_0}{2e}$  とおりの電圧を設定できるポテンシオメータは

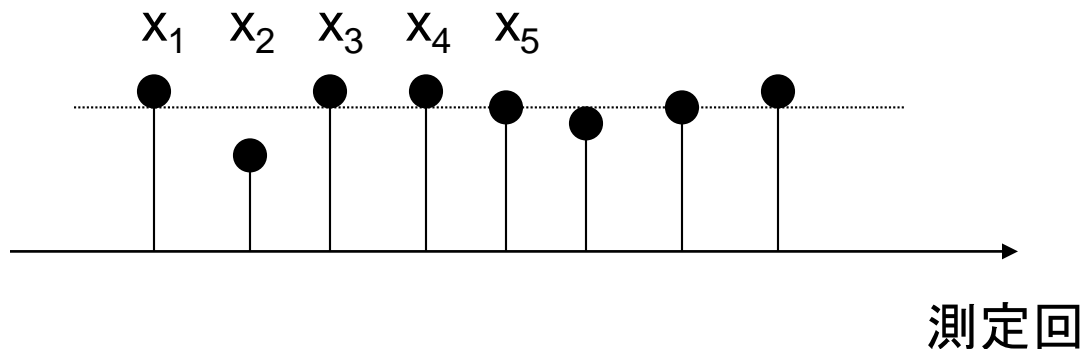
$\log_2 \frac{V_0}{2e}$  ビット      のメモリと等価



## 2. ノイズの中で伝達可能な情報量

### 2) 受信者が時間平均値を取得できる場合に伝達可能な情報量

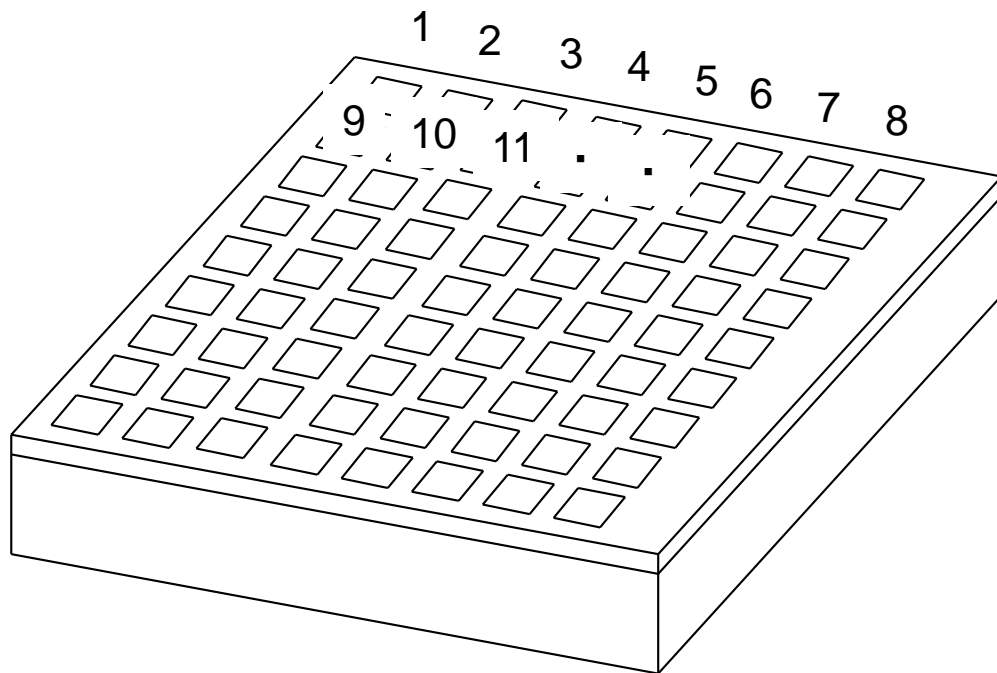
- 先験情報：電圧値は時間的に一定
- $n$  回測定を繰り返し、記録する
- 各時刻のノイズはランダム



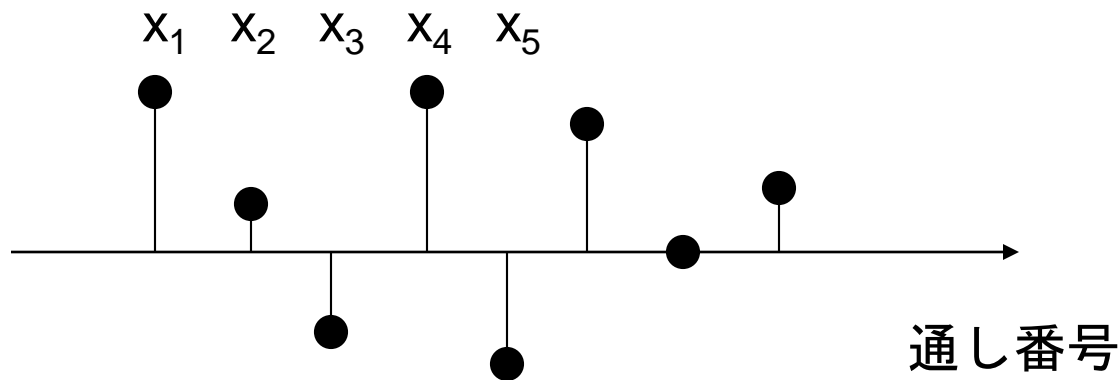
---

上記の場合に識別可能な電圧値の数は、  
1回測定の場合の  $\sqrt{n}$  倍になる

## 2. ノイズの中で伝達可能な情報量 2) 時間平均値を取得できる場合



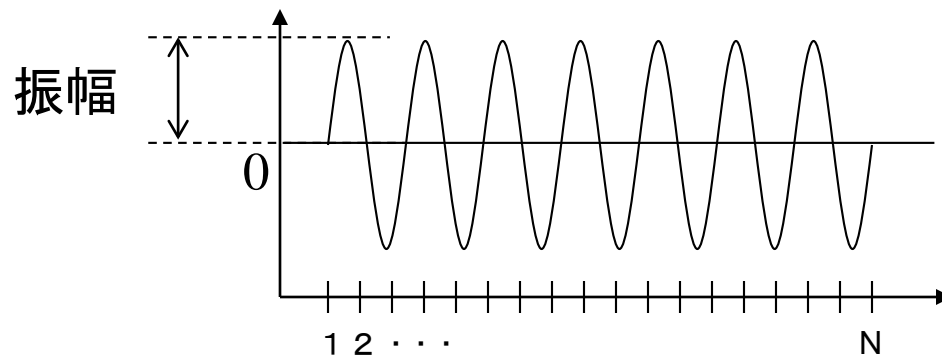
何についての平均か？  
時間、空間、試行、...



### 3. 変調方式と伝達可能な情報量

情報を伝達する方法について より一般的に考える

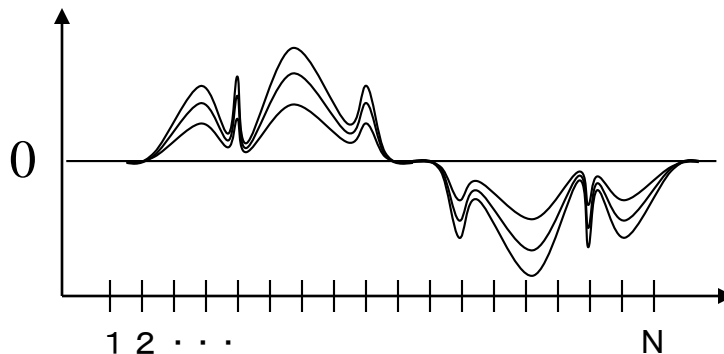
① 決まった波形の振幅で情報を伝える (含: 直流波形)



AM変調  
(Amplitude Modulation)

--- 振幅で情報を伝える

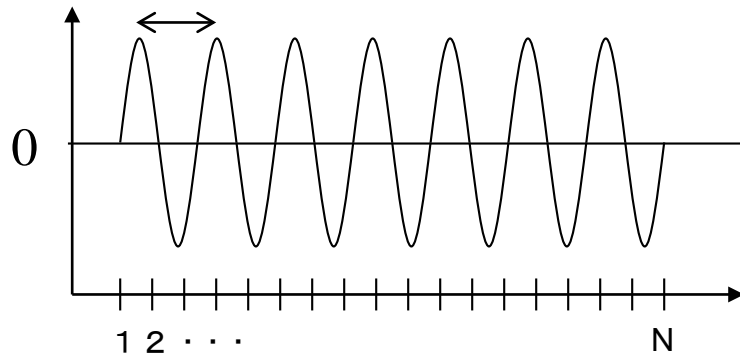
$$f(n) = A\phi(n)$$



一般の場合

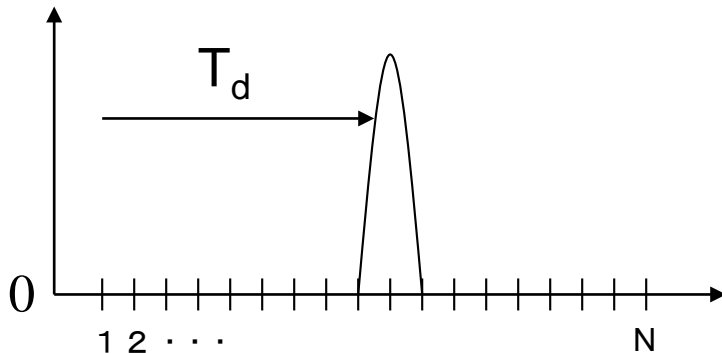
### 3. 変調方式と伝達可能な情報量

#### ② 周波数で情報を伝える



FM変調  
(Frequency Modulation)

#### ③ 信号の発生時刻で情報を伝える



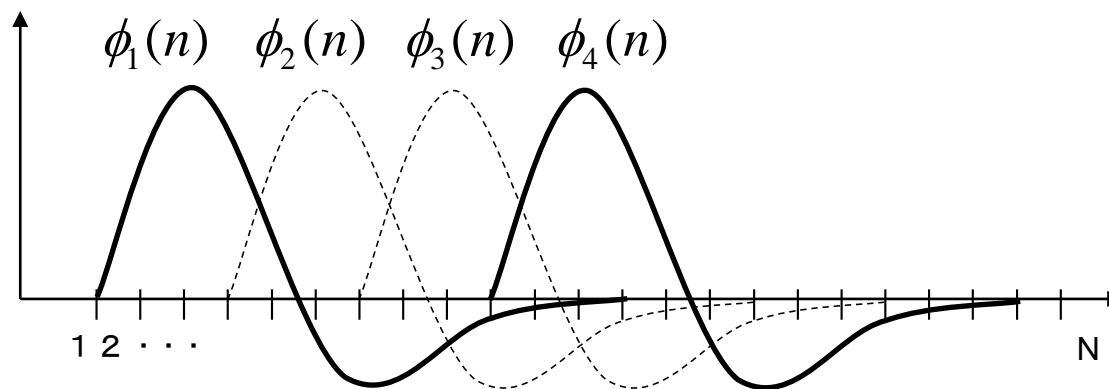
PIM  
(Pulse Interval Modulation)

### 3. 変調方式と伝達可能な情報量

④  $m$  個の直交信号波形  $\phi_i(n)$  の組み合わせで情報を伝える

例：(1, 0, 0, 1) を伝送する信号波形

$$s(n) = a_1\phi_1(n) + a_2\phi_2(n) + a_3\phi_3(n) + a_4\phi_4(n) = \phi_1(n) + \phi_4(n)$$



### 3. 変調方式と伝達可能な情報量

各方式によって何ビットの情報が伝送可能か？

[1] 信号長は  $N$  点.

[2] ノイズは信号と無相関で白色.  
エネルギーは  $W$ .

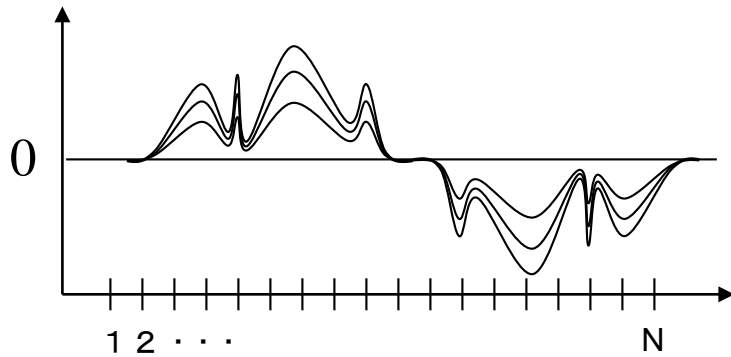
[3] 信号のエネルギーは  $S$  以下.

[前提]

Nyquist 周波数で帯域制限後サンプリング

### 3. 変調方式と伝達可能な情報量

#### ① 振幅変調によって伝達可能な情報量



$$s(n) = A\phi(n)$$

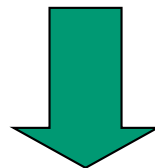


- ・  $\phi(n)$  は受信者も知っている
- ・  $A$  によって情報を伝達

\*  $A$  は負の数も取るものとする

#### 考え方

$\phi(n)$  を含む正規直交基底で観測信号を展開する.



観測量  $p(n)$

$$p(n) = s(n) + w(n)$$

↑                    ↑  
真値                ノイズ

$p(n)$  を以下のように展開することはつねに可能

$$p(n) = p_0\phi(n) + p_1\varphi_1(n) + p_2\varphi_2(n) + \cdots + p_{N-1}\varphi_{N-1}(n)$$

↑  
信号に平行な  
単位ベクトル

↑                    ↑                    ↑  
勝手に作った正規直交ベクトル



一つの自由度に分配されるノイズエネルギーの期待値

$$\overline{w_0^2} = \frac{W}{N}$$

ノイズがランダムで、 $N$ が十分大きい場合

例えば  $|w_0| > 2.58\sqrt{W/N}$  となる確率は 1%

伝達可能な振幅の段階数（白色雑音）

信号の形状によらず

$$\frac{2\sqrt{S}}{r \cdot 2\sqrt{W/N}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{NS}{W}} \text{ 段階}$$



$r = 2.58$  のとき段階を誤る確率は 1 %

信号とノイズが独立であれば、、、

信号の全エネルギー

$$S = s^2 N$$

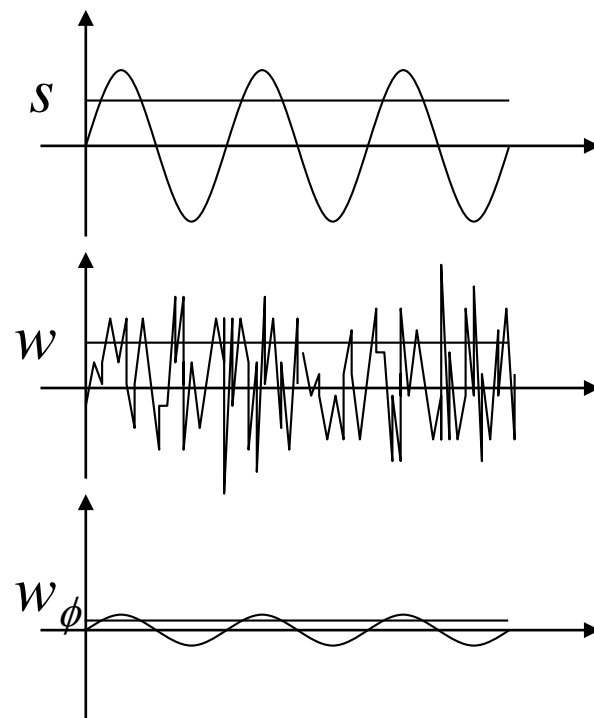
( $s$ : 信号の実効値)

ノイズの全エネルギー

$$W = w^2 N$$

ノイズの  $\phi$  成分のエネルギー

$$\frac{W}{N} = w_\phi^2 N$$



伝達可能な振幅の段階

信号の形状によらず  $\frac{s}{w_\phi} = \sqrt{N} \sqrt{\frac{S}{W}}$  段階

( $r$  は省略)

結論
----

信号強度によって伝達可能な情報量

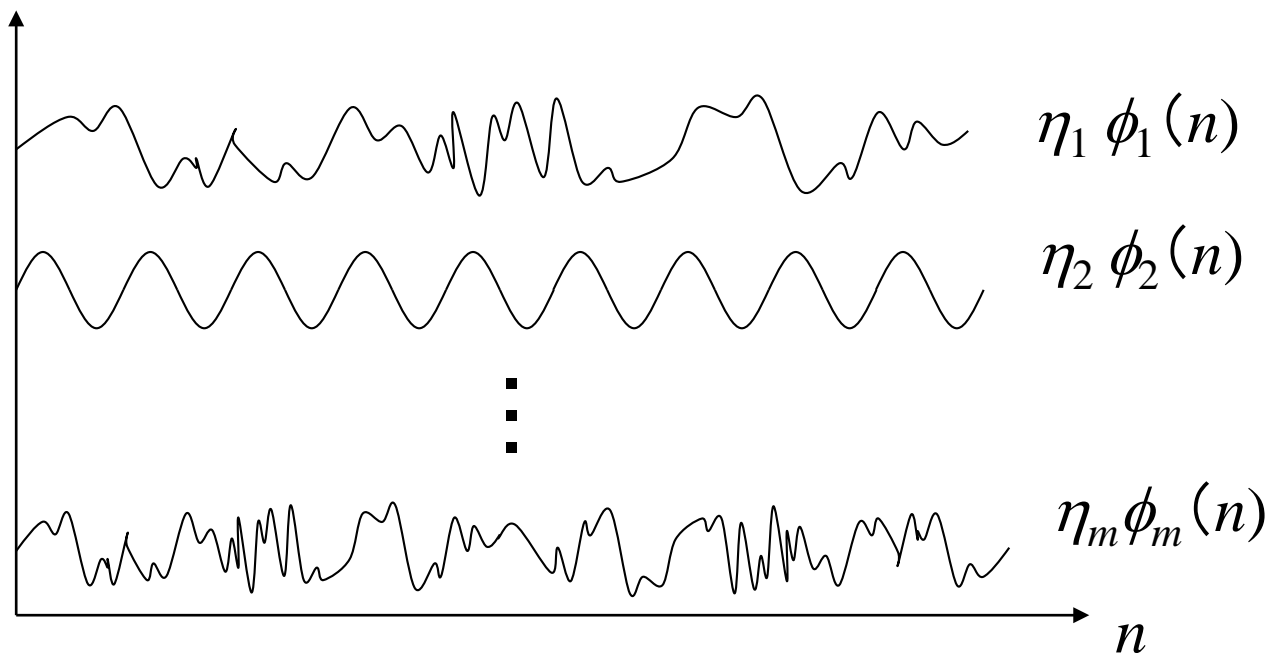
$$\log_2 \sqrt{N \frac{S}{W}} \quad \text{ビット}$$

( $r$  は省略)

## ④ 直交信号の組み合わせで情報を伝送する

波形が既知である信号の存在を確信するための、  
信号の最小強度

$$\eta_i^2 \approx r^2 \frac{W}{N} \equiv \eta^2 \quad (\|\phi_i\| = 1)$$



### $S < W$ のとき --- 戦略1

信号の存在を確認できる最小エネルギーをもち、互いに直交する  $m$  個の関数  $\{\eta\phi_1, \eta\phi_2, \dots, \eta\phi_m\}$  を用意する。

各関数が存在するかしないかの組み合わせで情報を伝達する。

$$s(n) = a_1\eta\phi_1(n) + a_2\eta\phi_2(n) + \dots + a_m\eta\phi_m(n) \quad (a_i = 1 \text{ or } 0)$$

\* 2進数  $a_1a_2 \dots a_m$  を伝達する。

### $S > W$ のとき --- 戦略2

$N$  次元の空間を張る正規直交基底  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$  を用意する。

各基底関数  $\phi_i$  に、

$$-\sqrt{S/N} < s_i < \sqrt{S/N}$$

の重みをつけ、送信する。受信側は各  $s_i$  を観測する。ここで  $s_i$  は離散的な値をとるものとし、ノイズが加算されてもそれらが正しく同定されるような間隔で設定されている。

同時に選択可能な直交基底の最大数  $m$

[1]  $S < W$  のとき

$$m = \frac{1}{r^2} \frac{SN}{W}$$

[2]  $S > W$  のとき

$$m = N$$

## 伝達可能な情報量

[1]  $S < W$  のとき

$m$  個の信号成分の選択の仕方で情報を伝える場合

$$m = \frac{SN}{r^2W} \quad \text{ビット}$$

[2]  $S > W$  のとき

各信号成分の最大エネルギーを  $\frac{S}{N}$  とし、その強度も利用する場合

$$\log_2 \left( \frac{1}{r} \sqrt{\frac{S}{W}} \right)^N = \frac{N}{2} \log_2 \frac{S}{r^2W} \quad \text{ビット}$$



考察
----

$S < W$  の場合に、  
 $\phi_i$  の信号振幅をノイズ振幅( $\phi_i$  に平行な成分の  
振幅)の  $k$  倍とし、(その分  $m$  は減る) それぞ  
れが  $k$  (より正確には  $k+1$ ) 段階の強度を伝達  
すると、伝送可能な情報量はどうか？

同時に送れる直交信号の最大数  $m'$  は

$$m' = \frac{1}{k^2} m$$

したがって、伝送可能な情報量は

$$\log_2 (k + 1)^{m'} = \log_2 (k + 1)^{m/k^2}$$

$$= \frac{m}{k^2} \log_2 (k + 1) \quad \text{ビット}$$

\* この結果から何が言えるか？

- [1] 信号長は  $N$  点.  
 [2] ノイズは白色.  
 エネルギーは  $W$ .  
 [3] 信号のエネルギーは  $S$  以下.

① 振幅変調  $\log_2 \sqrt{N \frac{S}{W}}$  ビット \*ただしさらに  $N$  通りの波束が選択可能

② 周波数変調  $\log_2 \left( N \sqrt{N \frac{S}{W}} \right)$  ビット

③ PIM  $\log_2 \left( N \sqrt{N \frac{S}{W}} \right)$  ビット

④ 直交信号の組み合わせ

{	戦略1	$\frac{NS}{W}$ ビット	
	戦略2	$N \log_2 \sqrt{\frac{S}{W}}$	ビット

注意:  $r$  は省略

#### 注意点

1. ノイズは白色を仮定
2. 信号エネルギーの上限を設定
3. 「無相関」の意味に気をつける

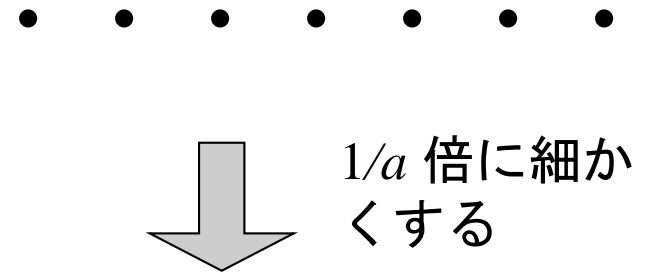
# 信号の帯域と伝達可能な情報量

帯域  $B$  を  $a$  倍し、サンプル間隔を  $1/a$  倍に細かくすると、単位時間あたりの信号、ノイズのエネルギーは以下のように変化する

$$S \text{ ---> } aS$$

$$W \text{ ---> } a^2W$$

$$N \text{ ---> } aN$$



## 1) 振幅変調で伝達可能な情報量

$$\log \sqrt{N \frac{S}{W}} \text{ ビット/s} \quad (\text{帯域に依存しない})$$

## 2) ④の方法 --- 後の章でより一般的に考える

帯域  $B$  のときに単位時間あたり伝達可能な情報量

$$H = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{W} \right) \text{ ビット/s}$$

## 例題

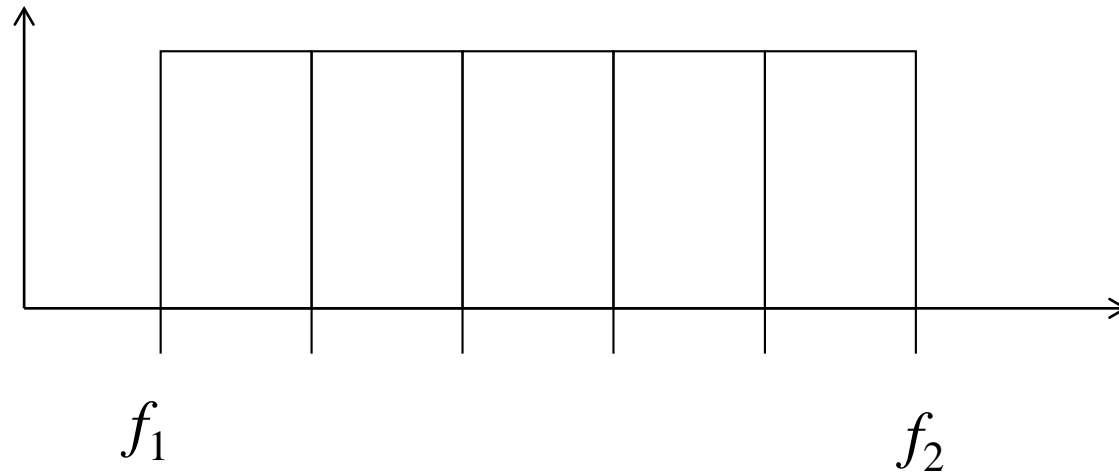
ある生物が体液中の3種類の化学成分濃度  $(x_1, x_2, x_3)$  [%] を自律的に変化・保持させることにより一種の記憶動作を行っているものとする。体内にはそれらの濃度に対して

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

のように  $(y_1, y_2, y_3)$  を出力する3種類のセンサがあり、感覚系の上位機構は  $(y_1, y_2, y_3)$  の各成分値を  $\pm 0.1$  程度の精度で検出できるものとする。この記憶系が一回の動作で記録可能な情報は最大何ビットか？

なお  $x_i$  は  $0 < x_i < 10$  なる範囲の値を自由にとることができるものとし、各成分の読み取り誤差間に相関は無いものとする。

## 例題



周波数  $f_1$  から  $f_2$  までを  $k$  個の帯域に分割し、各チャンネルごとに信号を送信した。

1. 各チャンネルごとのパワーの最大値を  $S_c$  [W] とし、ノイズは白色性、密度  $\alpha$  [W/Hz] とする。  
通信容量の理論限界はいくらか？
2.  $k$  チャンネルのうち、 $m$  チャンネルについてはノイズエネルギー密度が  $p\alpha$  であった。(他のチャンネルは  $\alpha$  とする。) 信号の総パワーを一定とすると、各チャンネルにどのようにパワーを割り振ると、通信容量は最大になるか？